La méthode de Bairstow

Lionel Fourquaux

21 mai 2020

La méthode de Bairstow est une variante de la méthode de Newton, particulièrement adaptée à la recherche des racines de polynômes à coefficients réels. Comme la méthode de Newton, sa convergence est quadratique, sauf pour les racines multiples, mais :

- elle permet de trouver les racines complexes (contrairement à la méthode de Newton sur $\mathbb{R}$) ;
- elle est plus rapide (d'un facteur constant) que la méthode de Newton sur $\mathbb{C}$;
- elle garde une convergence quadratique en cas de racines doubles (mais pas d'ordre supérieur) ;
- souvent, elle donne des résultats plus précis que la méthode de Newton sur $\mathbb{R}$.

1 La méthode de Bairstow

Considérons un polynôme à coefficients réels :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0$$

L'idée de la méthode est de rechercher les racines de P en les regroupant par paires. Plus précisément, on cherche un polynôme $X^2 - sX + p$ (avec $s, p \in \mathbb{R}$) qui divise P. Ses racines $\frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ sont alors des racines de P.

Pour cela, notons $\alpha(s,p)X + \beta(s,p)$ le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - sX + p$. Il suffit de résoudre le système d'équations (non linéaires) $\alpha(s,p) = \beta(s,p) = 0$ en les inconnues s et p, ce qui peut se faire par la méthode de Newton en plusieurs variables :

$$\begin{pmatrix} s_{k+1} \\ p_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_k \\ p_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial s}(s_k, p_k) & \frac{\partial \alpha}{\partial p}(s_k, p_k) \\ \frac{\partial \beta}{\partial s}(s_k, p_k) & \frac{\partial \beta}{\partial p}(s_k, p_k) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha(s_k, p_k) \\ \beta(s_k, p_k) \end{pmatrix}$$

Pour calculer efficacement $\alpha(s,p), \beta(s,p), \frac{\partial \alpha}{\partial s}, \frac{\partial \alpha}{\partial p}, \frac{\partial \beta}{\partial s}$ et $\frac{\partial \beta}{\partial p}$, on utilise une généralisation de la méthode de Horner.

2 Une méthode de Horner généralisée

La méthode du Horner classique est une réécriture de l'algorithme de division du polynôme P par $X - a$. Ici, on utilise la division par $X^2 - sX + p$.

Proposition 2.1. *Posons $b_m = 0$ pour $m > n$, et $b_m = a_m + sb_{m+1} - pb_{m+2}$ pour $m = n, n-1, \ldots, 0$. Alors le quotient de P par $X^2 - sX + p$ est $b_n X^{n-2} + b_{n-1} X^{n-3} + \cdots + b_2$ et le reste est $b_1(X - s) + b_0$.*

Démonstration. Si $n = 0$, le résultat est vrai puisque $b_0 = a_0$.

Si $n = 1$, le résultat est vrai puisque $b_1 = a_1$ et $b_0 = a_0 + sa_1$.

Pour $n \geqslant 2$, on procède par récurrence. La division de $a_n X^{n-1} + \cdots + a_1$ par $X^2 - sX + p$ donne $b_n X^{n-3} + \cdots + b_3$ comme quotient et $b_2(X - s) + b_1$ comme reste. En divisant $(b_2(X - s) + b_1)X + a_0$ par $X^2 - sX + p$, on trouve b_2 comme quotient, et pour reste

$$(b_2(X - s) + b_1)X + a_0 - (X^2 - sX + p)b_2 = b_1 X + a_0 - pb_2 = b_1(X - s) + b_0,$$

d'où la propriété. □

Pour calculer les dérivées partielles, on dérive les relations de la proposition 2.1. On trouve

$$\frac{\partial b_m}{\partial s} = b_{m+1} + s\frac{\partial b_{m+1}}{\partial s} - p\frac{\partial b_{m+1}}{\partial s}.$$

Ces relations sont de la même forme que celles de la proposition 2.1, en remplaçant les a_m par b_{m+1}. Autrement dit, si l'on représente les coefficients sous forme de colonnes :

$$\begin{array}{lll}
a_n & 0 & 0 \\
a_{n-1} & b_n = a_n & 0 \\
a_{n-2} & b_{n-1} = a_{n-1} + sb_n & c_n = b_n \\
a_{n-3} & b_{n-2} = a_{n-2} + sb_{n-1} - pb_n & c_{n-1} = b_{n-1} + sc_n \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_0 & b_1 = a_1 + sb_2 - pb_3 & c_2 = b_2 + sc_3 - pc_4 \\
 & b_0 = a_0 + sb_1 - pb_2 & c_1 = b_1 + sc_2 - pc_3
\end{array}$$

alors la troisième colonne se calcule par le même procédé que la deuxième, et on a $\frac{\partial b_m}{\partial s} = c_{m+1}$.

On pourrait s'attendre à devoir calculer une quatrième colonne avec des formules légèrement différentes pour obtenir $\frac{\partial b_m}{\partial p}$, mais il n'en est rien : on trouve $\frac{\partial b_m}{\partial p} = -c_{m+2}$.

Une itération de la méthode de Bairstow est alors donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lll}
s_{k+1} & = & s_k - \frac{b_0(s_k,p_k)c_3(s_k,p_k) - b_1(s_k,p_k)c_2(s_k,p_k)}{c_1'(s_k,p_k)c_3(s_k,p_k) - c_2(s_k,p_k)^2} \\
p_{k+1} & = & p_k - \frac{b_0(s_k,p_k)c_2(s_k,p_k) - b_1(s_k,p_k)c_1'(s_k,p_k)}{c_1'(s_k,p_k)c_3(s_k,p_k) - c_2(s_k,p_k)^2}
\end{array}\right. \qquad \text{avec } c_1' = c_1 - b_1 = sc_2 - pc_3.$$

3 Calcul des racines d'un polynôme

Pour rechercher toutes les racines d'un polynôme, on commence par fixer un point initial, par exemple $s = 0, p = 0$. On itère la méthode de Bairstow jusqu'à ce que $|s_{k+1} - s_k| + |p_{k+1} - p_k| \leqslant 10^{-2}\left(|s_k| + |p_k|\right)$, puis on fait quelques itérations supplémentaires (typiquement 5 ou 6) pour raffiner les valeurs obtenues jusqu'à la précision de la machine.

On renvoie les deux racines trouvée, puis on divise le polynôme par $X^2 - sX + p$ (la division se faisant aussi par la méthode de Horner généralisée de la proposition 2.1), et on recommence sur le quotient.

Quand le quotient est de degré 1 ou 2, on trouve les racines directements, ce qui termine le calcul.

Pour limiter l'accumulation des erreurs d'arrondi, on peut éventuellement faire une dernière itération à l'aide du polynôme initial.

Comme dans la méthode de Newton, il peut arriver que l'on rencontre une division par 0. Dans ce cas, on peut essayer un autre point initial.

Finalement, les polynômes de degré impair avec une seule racine réelle posent des problèmes de stabilité numérique avec la méthode de Bairstow, qui peut ne pas fonctionner dans ce cas (la condition d'arrêt ci-dessus n'est pas rencontrée au bout d'un nombre raisonnable d'itérations). Dans ce cas, on peut rajouter une racine au polynôme (en le multipliant par n'importe quel polynôme de degré 1) avant d'employer la méthode ci-dessus.

4 Suggestions

1. Donner des exemples de problèmes où l'on est amené à chercher des valeurs approchées des racines d'un polynôme.
2. On pourra programmer la recherche d'un couple de racines par la méthode de Bairstow.
3. Le calcul des dérivées partielles se fait ici en « rajoutant une colonne » à la méthode de Horner généralisée (en utilisant les résultats intermédiaires à la place des coefficients du polynôme). Qu'obtient-on si l'on « rajoute une colonne » à la méthode de Horner classique ? et si l'on rajoute 2, 3, ... colonnes ?
4. La résolution des équations de degré 2 utilise des racines carrées. Comment peut-on calculer une racine carrée à partir des additions, soustractions, multiplications et divisions de flottants ? Commenter l'utilisation de racines carrées dans le cadre de la méthode de Bairstow.
5. La méthode de Bairstow utilise la méthode de Newton à deux variables pour rechercher un couple de racines du polynôme. Pourrait-on utiliser la méthode de Newton à n variables pour trouver simultanément toutes les racines ? (Penser aux relations coefficients-racines).