Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate

Lionel Fourquaux

19 février 2008

Table des matières

1 Introduction

1.1 Les séries de Coleman

On suppose ici que p est un nombre premier, F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ (dont on fixe dorénavant un plongement dans $\mathbf{C}_p$), $q = p^h$ le cardinal du corps résiduel k_F de F, et $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate d'anneau des endomorphismes l'anneau $\mathcal{O}_F$ des entiers de F. Notons π_F une uniformisante de $\mathcal{O}_F$, F_n l'extension de F engendrée par les points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$, et $F_\infty = \bigcup F_n$. Soit (η_n) un générateur du module de Tate de $\mathcal{F}$ (i.e. la limite projective des modules des points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$). Si K est une extension finie de F, on note $K_n = K\,F_n$ et $K_\infty = K\,F_\infty$. Enfin, on note $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K, et $\Gamma_K = \mathcal{G}_K/\mathcal{G}_{K_\infty}$. Enfin, on note $\chi_{\mathcal{F}}$ le caractère associé au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$.

Dans [Col79], Coleman a montré le résultat suivant.

Théorème 1.1.1. *Soit $u = (u_n)$ un élément de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$, où la limite projective est prise pour les applications normes. Alors il existe une unique série entière $\mathrm{Col}_u(X) \in \mathcal{O}_F[[X]]$ telle que $\mathrm{Col}_u(\eta_n) = u_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

On trouve ainsi un morphisme injectif de $\varprojlim \mathcal{O}_{F_n}$ dans $\mathcal{O}_F[[X]]$. De plus, les séries f_u vérifient

$$\prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(F_1/F)} \mathrm{Col}_u(X +_{\mathcal{F}} \sigma(\eta_1)) = \mathrm{Col}_u([\pi_F]_{\mathcal{F}}(X)).$$

Ce morphisme (ou une variante, selon les auteurs) est habituellement appelé l'isomorphisme de Coleman.

Ce résultat joue un rôle fondamental dans l'étude des fonctions L p-adiques (en particulier avec $F = \mathbf{Q}_p$, $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$ pour la fonction ζ de Kubota-Leopold, ou avec le groupe formel associé à une courbe elliptique à multiplication complexe dans [CW78]).

1.2 L'exponentielle de Perrin-Riou et son inverse

Dans [Per94], Perrin-Riou donne une généralisation de ce résultat, sous la forme d'une application « exponentielle », qui permet de reconstruire l'inverse de l'isomorphisme Coleman dans le cas où $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$, et en est ainsi une généralisation.

Plus précisément, si V est une représentation p-adique de $\mathcal{G}_K$, avec K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, la suite exacte fondamentale

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+} \longrightarrow 0$$

(cf. par exemple [Col98]) donne naissance à la suite exacte longue de cohomologie suivante.

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow (\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_V} H^1(K,V) \longrightarrow \dots$$

On pose $D_{\mathrm{cris}}(V) = (\mathbf{B}_{\max} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}$, et on note $H^1_e(K, V)$ le noyau de la flèche

$$H^1(K, V) \longrightarrow H^1(K, \mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V).$$

On a alors la suite exacte

$$0 \longrightarrow V^{\mathcal{G}_K} \longrightarrow D_{\mathrm{cris}}(V)^{\varphi=1} \longrightarrow ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \xrightarrow{\exp_V} H^1_e(K, V) \longrightarrow 0.$$

L'application $\exp_V$ est appelée exponentielle de Bloch-Kato.

Perrin-Riou construit une famille d'applications (qu'elle appelle « applications des périodes ») qui en un sens interpolent les exponentielles de Bloch-Kato des représentations obtenues en tordant V par les puissances du caractère cyclotomique. On pourra consulter [Per94] et [Pe95a] pour l'énoncé précis des résultats en question. Si l'on étudie la représentation $\mathbf{Q}_p(1)$, l'inverse de l'exponentielle de Perrin-Riou redonne l'isomorphisme de Coleman (cf. [Per94] et [CC99]).

Ces résultats s'inscrivent dans le cadre d'un procédé général (mais conjectural) de construction de fonctions L p-adique, à partir d'un système d'éléments « globaux » (comme les unités cyclotomiques).

Perrin-Riou se restreint au cas où la représentation V est cristalline. Dans [Col98], Colmez donne une construction explicite de l'exponentielle de Perrin-Riou (et de sa réciproque, l'application « logarithme de Perrin-Riou ») pour toute représentation de de Rham.

Notons $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) = H^1(\mathcal{G}_K, \Lambda_K \otimes V)$, avec $\Lambda_K = \mathcal{O}_K[[\Gamma_K]]$. Comme les éléments de Λ_K peuvent être vus comme des mesures sur Γ_K, à un cocycle $\tau \mapsto \mu_\tau$ représentant un élément de $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ on peut associer la famille de cocycles $\tau \mapsto \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau$. Comme cette famille est compatible aux corestrictions, ce qui permet d'identifier $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ avec $\mathbf{Q}_p \otimes \varprojlim H^1(K_n, T)$ pour T un réseau de V.

Colmez obtient le résultat suivant (version simplifiée du théorème VI.3.1 de [Col98]).

Théorème 1.2.1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Soit V une représentation de de Rham telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on ait $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_{K_n}} = 0$. (On peut se placer dans ce cas en tordant V par une puissance du caractère cyclotomique). Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V)$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_e(K_n, V) \qquad \textit{quel que soit } n \geqslant 1.$$

Finalement, soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ et, si $n \in \mathbf{N}$, soit $c_n \in (\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$ tel que l'on ait

$$(1-\tau)(c_n) = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \quad \textit{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $p^n c_n$ converge dans l'espace de Banach p-adique $\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$, vers un élément de $(\mathbf{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$, noté $\mathrm{Log}_V^{(1)}(\mu)$.

Cette application $\mathrm{Log}_V^{(1)}(\mu)$ est l'application logarithme de Perrin-Riou. (La correspondance entre la formulation en terme de séries utilisée par Perrin-Riou, et les distributions de l'article de Colmez découle des résultats d'Amice, cf. [Ami78]).

1.3 Le logarithme de Perrin-Riou pour une extension de type Lubin-Tate

Les résultats de Perrin-Riou et Colmez utilisent la tour d'extensions cyclotomique. Il est tentant de vouloir les généraliser à la tour d'extensions engendrée par les points de torsion d'un groupe de Lubin-Tate. On a vu que l'isomorphisme de Coleman est bien défini dans ce cadre. L'objet de cet article est de donner une construction du « logarithme de Perrin-Riou » qui généralise le résultat de Colmez.

Soit V une F-représentation de de Rham. Comme dans le cas cyclotomique, on a une exponentielle de Bloch-Kato, qui est définie à l'aide de la suite

$$0 \to V^{\mathcal{G}_K} \to ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \to ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \overset{\exp_{V,F}}{\longrightarrow} H^1(K,V) \to \dots$$

On note $H^1_{e,F}(K,V)$ le noyau de la flèche $H^1(K,V) \to H^1(K,(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$. Si $k \in \mathbf{Z}$ est assez grand, on a $H^1_{e,F}(K,V(\chi^k_{\mathrm{cyclo}})) = H^1(K,V(\chi^k_{\mathrm{cyclo}}))$ (où χ_{cyclo} désigne le caractère cyclotomique).

On peut également regarder la suite

$$0 \to V^{\mathcal{G}_K} \to ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \to ((\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V)^{\mathcal{G}_K} \overset{\exp_{V,F,\mathrm{id}}}{\longrightarrow} H^1(K,V) \to \dots$$

où $t_{\mathcal{F}} \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$ est la période associée au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$, et on définit $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K,V)$ comme le noyau de la flèche $H^1(K,V) \to H^1(K,(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$.

Le résultat suivant est démontré ici.

Théorème 1.3.1. *Soit $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate, défini sur une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$. Soit K une extension finie de F. Soit V une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$. On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{K_n}} = 0$. Soit $\mu \in H^1_{\mathrm{Iw}}(K,V)$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_{e,F}(K_n,V) \qquad \textit{quel que soit } n \geqslant 0.$$

Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit

$$c_n \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \qquad \textit{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $q^n c_n$ converge dans l'espace $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V$, vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$, que l'on note $\mathrm{Log}_{V,F}(\mu)$.

(On démontre en fait un résultat un peu plus général, avec des cocycles à valeurs dans un espace de distributions d'ordre assez petit).

Notons que dans le cas d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur 1, une telle généralisation a été établie par Shaowei Zhang ([Zha04]). Cependant, ce cas n'est pas fondamentalement différent du cas cyclotomique.

Pour un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1, la construction de Colmez ne s'étend pas directement. Plus précisément, cette construction se divise en deux grandes parties. Tout d'abord, on descend de $\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V$ à $(\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ en utilisant le fait que l'extension $\overline{K}/K_\infty$ est presque étale. Cette partie est essentiellement inchangée dans le cas Lubin-Tate. La difficulté apparaît dans la seconde partie, où on utilise des « traces de Tate normalisées » pour étudier l'action de $\mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ sur $(\mathbf{B}^+_{\max} \otimes V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$. Pour construire ces « traces de Tate normalisées », dans le cas cyclotomique, on définit des applications continues de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ dans K_n en associant à x la limite $\lim_{m\to+\infty} p^{n-m} \operatorname{Tr}_{K_m/K_n}(x)$. Or, cela ne fonctionne pas pour un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1 : $\mathrm{Tr}_{K_{m+1}/K_m}(\mathcal{O}_{K_{m+1}})$ n'est pas contenu dans $p^h\mathcal{O}_{K_n}$. On montrera ici (cf. partie 2.2) qu'il n'existe en fait pas d'application linéaire continue Galois-équivariante de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ dans K qui ne soit pas identiquement nulle.

Il faut noter toutefois que ce résultat n'exclut pas qu'il soit possible de construire des sortes de traces de Tate normalisées associées à un groupe de Lubin-Tate, si l'on accepte de considérer une forme un peu plus générale. Les méthodes employées dans la partie 2.2 suggèrent en particulier qu'il pourrait être nécessaire de considérer des applications à valeurs non pas dans K, mais dans un anneau plus grand, contenant en particulier les périodes du groupe de Lubin-Tate.

1.4 Questions en suspens

1.4.1 Lien avec la théorie des (φ, Γ)-modules

Dans le cas cyclotomique, on peut étudier (cf. [Ben00], [Ber03] et [CC99]) la théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques via la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine. La théorie des (φ, Γ)-modules s'étend naturellement au cas Lubin-Tate : l'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (que Fontaine note $W_{\mathcal{O}_F}(R)$) contient un élément $\varpi_{\mathcal{F}}$ qui vérifie $\varphi_F(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}})$ et $\gamma(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\chi_{\mathcal{F}}(\gamma)]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}})$ pour tout $\gamma \in \mathcal{G}_F$. Si on note $\mathbf{A}_F$ le sous-anneau $\widehat{\mathcal{O}_F[[\varpi_{\mathcal{F}}]][\varpi_{\mathcal{F}}^{-1}]}$ de $\widetilde{\mathbf{A}}_F$ (ou $W_{\mathcal{O}_F}(\mathrm{Frac}\, R)$ dans les notations de Fontaine), et $\mathbf{A} \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F$ le complété p-adique de la clôture séparable de $\mathbf{A}_F$, il n'est pas difficile de prouver, en adaptant les arguments de Fontaine, que $V \mapsto D(V) = (\mathbf{A} \otimes_{\mathcal{O}_F} V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$ définit une équivalence de catégories entre les représentations p-adiques de $\mathcal{G}_K$ et les (φ, Γ)-modules étales sur $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathcal{G}_{K_\infty}}$.

Malheureusement, le problème avec les traces de Tate normalisées se retrouve aussi du côté des (φ, Γ)-modules : l'opérateur ψ qui joue le rôle des traces de Tate normalisées dans la théorie cyclotomique, et dont le rôle est fondamental en théorie d'Iwasawa (on a un isomorphisme $H^1_{\mathrm{Iw}}(K, V) \simeq D(V)^{\psi=1}$) n'a pas d'équivalent dans le cas d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur plus grande que 1.

1.4.2 Lois de réciprocité explicites

Colmez obtient également, dans le cas cyclotomique, la loi de réciprocité explicite qui était conjecturée par Perrin-Riou. Cette partie de [Col98] n'est pas généralisée ici, car elle fait intervenir de manière plus centrale les traces de Tate normalisées.

Même en l'absence de traces de Tate normalisées, un certain nombre de travaux récents suggèrent fortement que les résultats déjà connus dans le cas cyclotomique s'étendent aux extensions associées à un groupe de Lubin-Tate.

- Schneider et Teitelbaum, dans l'article [ST01] ont montré que l'on peut relier les distributions sur $\mathcal{O}_F$ aux séries entières convergentes sur $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$, de manière analogue aux résultats d'Amice.
- Kato ([Kat93]) obtient une loi de réciprocité explicite pour les représentations données par les puissances du caractère associé au groupe de Lubin-Tate.
- Tsuji, dans l'article [Tsu04], étend la loi de réciprocité explicite de Kato à un caractère « de de Rham » général.

1.4.3 Lien avec l'isomorphisme de Coleman

Si

$$\delta : \varprojlim K_n^* \to H^1_{\mathrm{Iw}}(K, F(\chi_{\mathrm{cyclo}}))$$

est l'application fournie par la théorie de Kummer, et si l'on note $[x] \in \widetilde{\mathbf{A}}^+$ le représentant de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, alors pour tout $u = (u_n) \in \varprojlim \mathcal{O}_{K_n}^*$, on a :

$$\mathrm{Log}_{F(\chi_{\mathrm{cyclo}}),F}(\delta(u)) = t^{-1} \log[\mathrm{Col}_u(\overline{\varpi_{\mathcal{F}}})],$$

où $\overline{\varpi_{\mathcal{F}}} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ désigne la réduction de $\varpi_{\mathcal{F}}$ modulo π_F. En l'absence de traces de Tate normalisées, il est toutefois difficile de donner une formule explicite redonnant les séries de Coleman à partir de l'application logarithme construite ici.

1.5 Plan de l'article

Cet article est organisé en quatre parties. La première est consacrée à rappeler des résultats bien connus autour des groupes de Lubin-Tate, leurs périodes dans $\mathbf{C}_p$, et les traces de Tate normalisées partielles.

La deuxième partie donne des rappels rapides sur les définitions des anneaux de Fontaine dont on aura besoin par la suite et la définition d'une valuation p-adique sur $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, puis rappelle quelques résultats de cohomologie continue (tirés de [Col98], en adaptant les énoncés aux groupes de Lubin-Tate).

La troisième partie démontre le point le plus délicat de l'article (lemme 4.0.6). Cette preuve ne fait intervenir (indirectement) que les traces de Tate normalisées associées à des $\mathbf{Z}_p$-extensions, mais fait appel à des descriptions plus précises des éléments des anneaux de Fontaine.

La dernière partie est consacrée à la construction de l'application logarithme, avec une démarche similaire à celle de Colmez dans [Col98].

Je remercie tout particulièrement mon directeur de thèse, Pierre Colmez, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et tout le temps qu'il a investi pour me guider.

2 Rappels sur les groupes de Lubin-Tate

2.1 Définitions

Cette partie est consacrée à quelques rappels élémentaires, et vise surtout à fixer les notations.

Soient F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et π_F une uniformisante de F. Notons $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, $\mathbf{m}_F$ son idéal maximal, et k_F son corps résiduel. Posons $q = p^h = |k_F|$, et notons e_F le degré de ramification de F.

Soit $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \in \mathcal{O}_F[[T]]$ vérifiant

$$[\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \equiv \pi_F T \pmod{T^2} \qquad \text{et} \qquad [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) \equiv T^q \pmod{\pi_F}.$$

D'après [LT65], il existe alors un unique groupe de Lie formel $\mathcal{F}$, commutatif, de dimension 1, défini sur F, tel que si l'on note $T +_{\mathcal{F}} T' \in \mathcal{O}_F[[T,T']]$ sa loi, on ait

$$T +_{\mathcal{F}} T' \equiv T + T' \pmod{T^2, TT', T'^2} \quad \text{et} \quad [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T) +_{\mathcal{F}} [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T') = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(T +_{\mathcal{F}} T').$$

De plus, on a une action de $\mathcal{O}_F$ donnée par des séries $[a]_{\mathcal{F}}$ ($a \in \mathcal{O}_F$), qui sont caractérisées par

$$[a]_{\mathcal{F}} \equiv aT \pmod{T^2} \qquad \text{et} \qquad [a]_{\mathcal{F}}([\pi_F]_{\mathcal{F}}(T)) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}([a]_{\mathcal{F}}(T)).$$

Ce groupe formel $\mathcal{F}$ est le groupe de Lubin-Tate associé à la série $[\pi_F]_{\mathcal{F}}$. L'action de $\mathcal{O}_F$ en fait un $\mathcal{O}_F$-module formel. À isomorphisme près, ce module ne dépend que de π_F et F.

Pour $F = \mathbf{Q}_p$ et $[p]_{\mathcal{F}}(T) = (1+T)^p - 1$, on retrouve le groupe multiplicatif $\mathbf{G_m}$.

La série logarithme associée à $\mathcal{F}$,

$$\log_{\mathcal{F}}(T) = \lim_{n\to+\infty} \frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{\pi_F^n} = T + \cdots \in F[[T]],$$

définit un morphisme de groupes formels de $\mathcal{F}$ dans le groupe additif $\mathbf{G_a}$. Son rayon de convergence est 1. La série formelle réciproque donne une exponentielle $\exp_{\mathcal{F}}$ associée au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$.

Notons que si $x \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(x) = 0$ et $\left[\pi_F^{n-1}\right]_{\mathcal{F}}(x) \neq 0$, alors les points de π_F^n-torsion de $\mathcal{F}$ sont exactement les $[a]_{\mathcal{F}}(x)$ pour $a \in \mathcal{O}_F/\pi_F^n\mathcal{O}_F$.

Fixons dorénavant une suite (η_n) d'éléments de $\mathbf{C}_p$ telle que $\eta_0 = 0$, $\eta_1 \neq 0$ et $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(\eta_{n+1}) = \eta_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Cela correspond à fixer un générateur du module de Tate $T_p\mathcal{F} = \varprojlim \ker\,[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}$.

L'action du groupe de Galois absolu de F, $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ sur $T_p\mathcal{F}$ est donnée par un caractère $\chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{G}_F \to \mathcal{O}_F^*$. Il est caractérisé par la relation

$$\sigma(\eta_n) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\eta_n) \qquad (\forall n \in \mathbf{N},\ \forall \sigma \in \mathcal{G}_F).$$

Posons $F_n = F(\eta_n)$, pour tout $n \geqslant 0$. Ce sont des extensions galoisiennes finies totalement ramifiées de F. Pour $n > 0$, l'image par $\chi_{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{G}_{F_n}$ est $1 + \pi_F^n\mathcal{O}_F$.

Posons $F_\infty = \bigcup_{n\geqslant 0} F_n$, et $\widehat{F_\infty}$ son complété p-adique. Alors on a $\mathcal{G}_{F_\infty} = \mathcal{G}_{\widehat{F_\infty}} = \ker \chi_{\mathcal{F}}$.

Notons que tout ceci généralise le cas où $F = \mathbf{Q}_p$, $\mathcal{F} = \mathbf{G_m}$, $h = 1$, qui donne pour (F_n) la tour d'extensions cyclotomique. Le caractère $\chi_{\mathbf{G_m}}$ que l'on trouve alors est le caractère cyclotomique χ_{cyclo}.

2.2 Pourquoi le cas cyclotomique ne se généralise-t-il pas simplement ?

Nous pouvons maintenant expliquer pourquoi la construction de l'application « Logarithme de Perrin-Riou » donnée dans [Col98] pour la tour d'extensions cyclotomique ne se transpose pas immédiatement au cas de la tour d'extensions associée à un groupe de Lubin-Tate.

La difficulté apparaît dans la construction de traces de Tate normalisées. Dans le cas cyclotomique, on considère les applications $\frac{1}{p^{m-n}} \mathrm{Tr}_{F_m/F_n}$, pour des valeurs de m de plus en plus grandes, et l'on obtient une application linéaire continue de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ dans F_n, qui est $\mathcal{G}_F$-équivariante et qui est l'identité sur F_n.

Pour $h > 1$, la construction analogue serait de considérer les $\frac{1}{q^{m-n}} \mathrm{Tr}_{F_m/F_n}$, afin d'avoir toujours des projections sur F_n. Malheureusement, si $x \in \mathcal{O}_{F_m}$, on ne peut pas affirmer que Tr_{F_m/F_n} est dans $q^{m-c}\mathcal{O}_{F_n}$ pour une constante c indépendante de m. En effet, on a $\mathrm{Tr}_{F_m/F_n}(\mathcal{O}_{F_m}) = \pi_F^{m-n}\mathcal{O}_{F_n}$. Pour $v_p(\pi_F) < h$, on ne peut donc pas passer à la limite pour définir une application linéaire continue sur $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Non seulement la construction employée dans le cas cyclotomique ne fonctionne pas, mais il y a un réel obstacle à l'existence d'une application analogue dans le cas considéré ici. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition 2.2.1. *Il n'existe pas d'application linéaire continue f de $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ dans F_n telle que f soit $\mathcal{G}_F$-équivariante et $f|_{F_n} = \mathrm{id}$.*

Avant de démontrer cet énoncé, rappelons ce que sont les périodes de Hodge-Tate d'un groupe de Lubin-Tate.

Lemme 2.2.2. *Si $\chi_{\mathcal{F}}$ est le caractère associé au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ sur F, alors :*

(i) si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ contenant F, le $\mathcal{G}_K$-module $\mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}})$ est isomorphe à $\mathbf{C}_p(\chi_{\text{cyclo}})$;

(ii) si $\rho \in \text{End}(F, \mathbf{C}_p) \setminus \{1\}$, le $\mathcal{G}_{F\rho(F)}$-module $\mathbf{C}_p(\rho \circ \chi_{\mathcal{F}})$ est isomorphe à $\mathbf{C}_p$.

Ce résultat est démontré dans [SKL68] (lemme 2 de la partie A5 de l'appendice), et est essentiellement une application des résultats de [Tat66] (précisément du corollaire 2 du théorème 3 dans le paragraphe 4).

En particulier, pour tout $\rho \in \text{End}(F, \mathbf{C}_p) \setminus \{1\}$, il existe un $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p^*$ (unique à multiplication par un élément de F^* près) tel que $\rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) = \frac{\xi_\rho}{\sigma(\xi_\rho)}$, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F\rho(F)}$. En revanche, il n'existe pas de ξ_ρ pour $\rho = 1$ (par exemple parce que $H^0(K, \mathbf{C}_p(\chi_{\mathcal{F}})) = H^0(K, \mathbf{C}_p(\chi_{\text{cyclo}})) = 0$, ce qui est démontré dans [Tat66]).

On appellera ces éléments $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p^*/F^*$ les périodes de Hodge-Tate de $\mathcal{F}$. Notons qu'ils ne peuvent pas être algébriques sur $\mathbf{Q}_p$, puisqu'ils ont une infinité de conjugués sous l'action de $\mathcal{G}_F$.

Pour démontrer la proposition 2.2.1, il suffit de regarder quelle serait l'image du logarithme d'une période de Hodge-Tate du groupe de Lubin-Tate. En effet, on aurait, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$:

$$\begin{aligned}(1-\sigma)(f(\log \xi_\rho)) &= f((1-\sigma)(\log \xi_\rho)) \\ &= f(\log \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma))) \\ &= \log \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)).\end{aligned}$$

Comme $f(\log \xi_\rho)$ a donc une infinité de conjugués sous l'action de $\mathcal{G}_F$, il ne peut pas être algébrique, et ne peut donc pas être dans F_n.

2.3 Traces de Tate normalisées dans une tour d'extensions

Dans la partie 3.1 de l'article [Tat66], Tate étudie les $H^1(K, \mathbf{C}_p(\chi))$ pour certains caractères χ, à l'aide des traces de Tate normalisées. Cette partie reprend les résultats de l'article de Tate en prouvant que les constantes qui apparaissent sont uniformes pour les corps $K = F_n$.

Dans cette partie, on va fixer un morphisme $\rho : \mathcal{G}_{F_n} \to \mathbf{Z}_p$ (pour $n \geqslant 1$), trivial sur $\mathcal{G}_{F_\infty}$. Comme $\mathcal{G}_{F_n}/\mathcal{G}_{F_\infty}$ est isomorphe à $1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F$, il est facile d'en construire. On note $F_{n,\infty} = \overline{F}^{\ker \rho}$ et $F_{n,m} = \overline{F}^{\rho^{-1}(p^m \mathbf{Z}_p)}$. On se restreint très vite dans cette partie au cas où $n > \frac{e_F}{p-1}$.

Commençons par étudier les groupes de ramification de la tour des $F_{n,m}$. D'après le théorème de Herbrand (cf. [Ser68], chapitre 4, paragraphe 3), on a $\rho(\text{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu) = \rho(\text{Gal}(F_\infty/F_n)^\nu)$, donc, pour $n \geqslant 1$:

$$\rho(\text{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu) = \begin{cases} \rho(\mathcal{G}_{F_n}) & \text{si } -1 < \nu \leqslant q^n - 1 \\ \rho(\mathcal{G}_{F_{n+1}}) & \text{si } q^n - 1 < \nu \leqslant (q^n - 1) + q^{n-1}(q-1) \\ \rho(\mathcal{G}_{F_{n+2}}) & \text{si } (q^n - 1) + q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n - 1) + 2q^{n-1}(q-1) \\ \dots \end{cases}$$

De plus, si $n > \frac{e_F}{p-1}$, on a $(\mathcal{G}_{F_n}/\mathcal{G}_{F_\infty})^p = \mathcal{G}_{F_{n+e_F}}/\mathcal{G}_{F_\infty}$, donc il existe un entier $b \in \{0, \dots, e_F - 1\}$ tel que

$$\rho(\mathcal{G}_{F_n}) = \cdots = \rho(\mathcal{G}_{F_{n+b}}) = \mathbf{Z}_p \quad \text{et} \quad \rho(\mathcal{G}_{F_{n+b+1}}) = \cdots = \rho(\mathcal{G}_{F_{n+e_F}}) = p\mathbf{Z}_p.$$

On a donc

$$\rho\left(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)^\nu\right) =$$
$$\begin{cases} \mathbf{Z}_p & \text{si } -1 < \nu \leqslant (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) \\ p\mathbf{Z}_p & \text{si } (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) \\ p^2\mathbf{Z}_p & \text{si } (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+2e_F)q^{n-1}(q-1) \\ \dots \end{cases}$$

Lemme 2.3.1. *Il existe une suite de réels positifs* (b_m) *telle que :*

$$0 \leqslant b_m \leqslant 1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)}. \quad \textit{et} \quad v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}) = 1 - \frac{b_m}{p^m} \quad (\forall n > \frac{e_F}{p-1}).$$

Preuve : En effet, on a

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = \frac{1}{e_{F_n}} \int_{-1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{|\mathrm{Gal}(F_{n,m}/F_n)^\nu|}\right) d\nu,$$

$e_{F_n} = e_F q^{n-1}(q-1)$ (car F_n/F est totalement ramifiée) et, d'après le théorème de Herbrand,

$$|\mathrm{Gal}(F_{n,m}/F_n)^\nu| =$$
$$\begin{cases} p^m & \text{si } -1 < \nu \leqslant (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) \\ p^{m-1} & \text{si } (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) \\ p^{m-2} & \text{si } (q^n-1) + (b+e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu \leqslant (q^n-1) + (b+2e_F)q^{n-1}(q-1) \\ \dots \\ 1 & \text{si } (q^n-1) + (b+(m-1)e_F)q^{n-1}(q-1) < \nu, \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = \frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)} \Bigg(& 1 + (q^n-1) + (b+(m-1)e_F)q^{n-1}(q-1) \\ & - \frac{1 + (q^n-1) + bq^{n-1}(q-1)}{p^m} - \frac{e_F q^{n-1}(q-1)}{p^{m-1}} - \dots - \frac{e_F q^{n-1}(q-1)}{p} \Bigg), \end{aligned}$$

donc

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m}/F_n}) = m + \left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b\right) - \frac{p}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p^m}\right).$$

On a donc

$$v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}) = 1 + \frac{1}{p^m}\left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b\right) - \frac{p}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Comme $0 \leqslant b < e_F$ et $q \geqslant p > 1$, on a

$$\begin{aligned} b_m &= -\left(\frac{1}{e_F}\left(\frac{q}{q-1} + b\right) - \frac{p}{p-1}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\geqslant \left(\frac{p}{p-1} - 1 - \frac{1}{e_F(q-1)}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\geqslant \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{e_F(q-1)}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &\geqslant 0, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_m &\leqslant \left(\frac{p}{p-1} - \frac{q}{e_F(q-1)}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right) \\ &\leqslant 1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)}, \end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

On suppose désormais $n > \frac{e_F}{p-1}$.

Lemme 2.3.2. *On a les propriétés suivantes.*

(i) Si $x \in F_{n,m+1}$*, alors*

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) \geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).$$

(ii) Si $x \in F_{n,m}$*, alors*

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x)) \geqslant v_p(x) + m - \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).$$

(iii) Si $x \in F_{n,m+1}$ *et si* σ *est un générateur de* $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$*, alors*

$$v_p\left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)\right) \geqslant v_p\left(x - \sigma^{p^m}(x)\right) - 1.$$

Preuve : Si $x \in F_{n,m+1}$, on a (cf. [Ser68], chapitre 5, paragraphe 3, lemme 4) :

$$v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) \geqslant \frac{1}{e_{F_{n,m}}}\left\lfloor e_{F_{n,m}}\left(v_p(x) + v_p(\mathfrak{D}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}})\right)\right\rfloor,$$

donc, en utilisant le lemme 2.3.1 et en supposant $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)) &\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{b_m}{p^m} - \frac{1}{e_F(q-1)q^{n-1}p^m} \\ &\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-1)}{e_F p(q-1)} + \frac{q}{e_F(q-1)q^n}\right) \\ &\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q}{e_F p(q-1)}\left(p-1-\frac{p}{q^n}\right)\right) \\ &\geqslant v_p(x) + 1 - \frac{1}{p^m}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right). \end{aligned}$$

Si $x \in F_{n,m}$, on en déduit

$$\begin{aligned} v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x)) &\geqslant v_p(x) + m - \left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)\left(1 + \frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p^{m-1}}\right) \\ &\geqslant v_p(x) + m - (1-p^{-m})\frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \\ &\geqslant v_p(x) + m - \frac{p}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right). \end{aligned}$$

Pour le troisième point, posons $\tau = \sigma^{p^m}$. On a

$$px - \mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x) = \sum_{i=1}^{p-1}(1+\tau+\cdots+\tau^{i-1})(1-\tau)(x),$$

donc $v_p\left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m+1}/F_{n,m}}(x)\right) \geqslant v_p((1-\tau)(x)) - 1$. ■

Soit t_n l'application F_n-linéaire de $F_{n,\infty}$ dans F_n définie par $t_n(x) = \frac{1}{p^m}\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_n}(x)$ si $x \in F_{n,m}$.

Lemme 2.3.3. *Si σ est un générateur du groupe $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$, alors pour tout x dans $F_{n,\infty}$ on a :*

$$v_p(x - t_n(x)) \geqslant v_p(x - \sigma(x)) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right).$$

Preuve : On suppose pour démontrer cela que x est dans $F_{n,m}$ (avec $m > 0$), et l'on montre par récurrence une inégalité

$$v_p(x - t_n(x)) \geqslant v_p(x - \sigma(x)) - C_m.$$

On peut prendre $C_1 = 1$, d'après le lemme précédent. Pour $m > 1$, on a

$$\begin{aligned}
&v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \ - \ p\,t_n(x)) \\
&\qquad = v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \ - \ p\,t_n(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x))) \\
&\qquad \geqslant v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) - \sigma(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x))) - C_{m-1} \\
&\qquad \geqslant v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}((1-\sigma)(x))) - C_{m-1} \\
&\qquad \geqslant v_p((1-\sigma)(x)) + 1 - \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) - C_{m-1}.
\end{aligned}$$

En écrivant $x - t_n(x) = \left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x)\right) + \frac{1}{p}\left(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \ - \ p\,t_n(x)\right)$, on obtient

$$\begin{aligned}
v_p(x - t_n(x)) &\geqslant \min\left(v_p\left(x - \frac{1}{p}\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x)\right), v_p(\mathrm{Tr}_{F_{n,m}/F_{n,m-1}}(x) \ - \ p\,t_n(x)) - 1\right) \\
&\geqslant \min\Bigg(v_p\left(x - \sigma^{p^{m-1}}(x)\right) - 1, \\
&\qquad v_p((1-\sigma)(x)) - \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) - C_{m-1}\Bigg) \\
&\geqslant v_p((1-\sigma)(x)) - \max\left(1, \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) + C_{m-1}\right) \\
&\geqslant v_p((1-\sigma)(x)) - C_m
\end{aligned}$$

avec

$$C_m = \max\left(1, \frac{1}{p^{m-1}}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) + C_{m-1}\right).$$

Comme $C_1 = 1$, on en déduit par récurrence :

$$\begin{aligned}
C_m &= 1 + \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{m-1}}\right)\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),
\end{aligned}$$

d'où le lemme. ∎

Notons $\widehat{F_{n,\infty}}$ le complété de $F_{n,\infty}$. Alors le lemme 2.3.3 a en particulier pour conséquence que l'application t_n se prolonge par continuité à $\widehat{F_{n,\infty}}$, et l'application prolongée vérifie :

$$v_p(t_n(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right), \quad \text{pour tout } x \in \widehat{F_{n,\infty}}.$$

Désormais t_n désignera cette application prolongée. Notons qu'elle vérifie l'inégalité du lemme 2.3.3 pour tout $x \in \widehat{F_{n,\infty}}$.

2.4 Cohomologie continue de $\mathbf{C}_p$

Comme dans la partie précédente, on suppose dans cette partie que l'inégalité $n > \frac{e_F}{p-1}$ est vérifiée.

Lemme 2.4.1. *Soit $\lambda \in \mathcal{O}_{F_n}$, tel que*

$$v_p(1-\lambda) > 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),$$

et soit σ un générateur de $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$ (comme ci-dessus). L'opérateur $\lambda - \sigma$ est bijectif d'inverse continu sur $\ker t_n$, et l'on a

$$v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \quad \textit{pour tout } x \in \ker t_n.$$

(Notons que l'on a $1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right) \leqslant \frac{p}{p-1}$, donc on peut remplacer l'hypothèse sur λ par $v_p(1-\lambda) > \frac{p}{p-1}$ et la conclusion par $v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - \frac{p}{p-1}$. C'est ce qui est fait dans la suite de cette partie, pour simplifier les formules).

Preuve : Commençons par le cas $\lambda = 1$. L'opérateur $1-\sigma$ réalise une injection continue de $F_{n,m} \cap \ker t_n$ dans lui-même, donc une bijection. On obtient ainsi un inverse sur $F_{n,\infty} \cap \ker t_n$. De plus, d'après le lemme 2.3.3, si $x \in F_{n,\infty} \cap \ker t_n$, on a

$$v_p((1-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right),$$

donc $(1-\sigma)^{-1}$ est continu et se prolonge par continuité à tout $\ker t_n$. De plus, l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in \ker t_n$.

Pour traiter le cas général, on écrit

$$(1-\sigma)^{-1}(\lambda-\sigma) = 1 - (1-\lambda)(1-\sigma)^{-1},$$

Grâce à l'hypothèse $v_p(1-\lambda) > 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)$, la série $\sum_{i=0}^{+\infty}\left((1-\lambda)(1-\sigma)^{-1}\right)^i$ converge ; $\lambda - \sigma$ est donc inversible, d'inverse continu, et l'on a

$$(\lambda-\sigma)^{-1} = (1-\sigma)^{-1}\sum_{i=0}^{+\infty}\left((1-\lambda)(1-\sigma)^{-1}\right)^i.$$

On en déduit l'inégalité

$$v_p((\lambda-\sigma)^{-1}(x)) \geqslant v_p(x) - 1 - \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{q(p-2)}{e_F p(q-1)}\right)$$

pour tout $x \in \ker t_n$. ■

Considérons maintenant un caractère continu χ de $\mathcal{G}_{F_n}$ dans $\mathcal{O}_F^*$, trivial sur $\mathcal{G}_{F_{n,\infty}}$, et tel que $v_p(1-\chi(\sigma)) > \frac{p}{p-1}$ quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$.

Lemme 2.4.2. *Le $\mathcal{O}_{F_n}$-module*

$$H^1(\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n), \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}(\chi))$$

est annulé par multiplication par tout élément $u \in \mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant

$$v_p(u) \geqslant \frac{p}{p-1} + \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\sigma)).$$

Preuve : Soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, engendrant $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$, et soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle représentant c. Alors c est entièrement déterminé par $c_\sigma \in \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}(\chi)$. Posons $x = \frac{t_n(uc_\sigma)}{1-\chi(\sigma)} \in F_n$. Alors on a

$$v_p(x) \geqslant v_p(u) - \frac{p}{p-1} - v_p(1-\chi(\sigma)) = v_p(u) - \frac{p}{p-1} - \inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau)) \geqslant 0.$$

D'autre part, $uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x$ est un élément de $\ker t_n$. Posons

$$y = (1-\chi(\sigma)\sigma)^{-1}\left(uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x\right)$$

(en considérant $uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x$ comme un élément de $\widehat{F_{n,\infty}}$, sans torsion par le caractère χ). D'après le lemme 2.4.1, on a

$$\begin{aligned}
v_p(y) &\geqslant v_p(uc_\sigma - (1-\chi(\sigma))x) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \min\left(v_p(u), v_p(x) + v_p(1-\chi(\sigma))\right) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \min\left(v_p(u), v_p(u) - \frac{p}{p-1}\right) - \frac{p}{p-1} \\
&\geqslant v_p(u) - 2\frac{p}{p-1} \\
&\geqslant \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\sigma)) - \frac{p}{p-1} \\
&> 0.
\end{aligned}$$

On a alors $uc_\sigma = (x+y) - \chi(\sigma)\sigma(x+y)$, et $x+y \in \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}$, d'où le résultat. ■

Corollaire 2.4.3. *Soit L une extension finie de F. Il existe des constantes n_0 et c_0, dépendant seulement de F et L ; telles que, si $n \geqslant n_0$, le $\mathcal{O}_{LF_n}$-module*

$$H^1(\mathrm{Gal}(LF_{n,\infty}/LF_n), \mathcal{O}_{\widehat{LF_{n,\infty}}}(\chi))$$

est annulé par multiplication par tout élément $u \in \mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant $v_p(u) \geqslant c_0 + \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\sigma))$.

Preuve : Comme l'extension L/F est finie, il existe un n_0 tel que les extensions LF_{n_0}/F_{n_0} et F_∞/F_{n_0} soient linéairement disjointes. Supposons $n \geqslant n_0$.

Comme $F_{n,\infty}$ est contenu dans F_∞ par construction, les extensions LF_n/F_n et $F_{n,\infty}/F_n$ sont linéairement disjointes. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de $\mathcal{O}_{LF_n}$ sur $\mathcal{O}_{F_n}$. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est aussi une base de $\mathcal{O}_{\widehat{LF_{n,\infty}}}$ sur $\mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}$, et de plus les x_i sont fixes sous $\mathrm{Gal}(LF_{n,\infty}/LF_n)$.

On est donc ramené, par décomposition sur cette base, à montrer le résultat pour un élément de $H^1(\mathrm{Gal}(LF_{n,\infty}/LF_n), \mathcal{O}_{\widehat{F_{n,\infty}}}(\chi))$, or $\mathrm{Gal}(LF_{n,\infty}/LF_n)$ est isomorphe $\mathrm{Gal}(F_{n,\infty}/F_n)$, puisqu'on a des extensions linéairement disjointes, donc on est ramené au lemme 2.4.2. ■

Lemme 2.4.4. *Si L est une extension finie de F, on a $H^1(LF_{n,\infty}, \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}) = 0$.*

Ce lemme est démontré dans [Col98]. On peut aussi le démontrer avec les arguments employés par Tate dans la partie 3.2 de [Tat66].

Proposition 2.4.5. *Soit L une extension finie de F. Il existe des constantes n_0 et c_1, dépendant seulement de F et L ; telles que, si $n \geqslant n_0$, le $\mathcal{O}_{LF_n}$-module $H^1(LF_n, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}(\chi))$ est annulé par multiplication par tout élément u de $\mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant $v_p(u) \geqslant c_1 + \inf_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau))$.*

Preuve : On a la suite exacte d'inflation-restriction

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(LF_{n,\infty}/LF_n), \left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\right)^{\mathcal{G}_{LF_{n,\infty}}}(\chi)) \to H^1(\mathcal{G}_{LF_n}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}(\chi)) \to H^1(\mathcal{G}_{LF_{n,\infty}}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}).$$

D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate (cf. [Ax70]), on a $\left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}\right)^{\mathcal{G}_{LF_{n,\infty}}} = \mathcal{O}_{\widehat{LF_{n,\infty}}}$. D'autre part, d'après le lemme précédent, $H^1(\mathcal{G}_{LF_{n,\infty}}, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})$ est annulé par tout élément de $\mathcal{O}_{F_n}$ de valuation strictement positive, comme par exemple π_{F_n} (qui est de valuation $\frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)}$), et il suffit alors d'employer le corollaire 2.4.3. ■

Donnons pour finir une conséquence de cette proposition qui est utilisée par la suite.

Corollaire 2.4.6. *Il existe des constantes $n_1 \in \mathbf{N}$ et $c \in \mathbf{R}$ (dépendant seulement de F), avec $n_1 > \frac{pe_F}{p-1}$ et $c \geqslant 0$, telles que si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ sont trois idéaux fractionnaires de $\mathbf{C}_p$, avec $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$, alors pour $n \geqslant n_1$, le noyau de l'application*

$$H^0(F_n, (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})(\chi_\mathcal{F})) \longrightarrow H^1(F_n, (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})(\chi_\mathcal{F}))$$

est annulé par multiplication par tout élément $u \in \mathcal{O}_{F_n}$ vérifiant $v_p(u) \geqslant \frac{n}{e_F} + v_p(\mathfrak{a}) - v_p(\mathfrak{c}) + c$.

Preuve : Soit L une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$, contenant F. On prend n_1 supérieur ou égal au n_0 de la proposition 2.4.5.

Quitte à se restreindre à $\mathcal{G}_{LF_n}$ et à multiplier les trois idéaux par le produit des périodes (cf. lemme 2.2.2) du groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$, on peut remplacer le caractère $\chi_\mathcal{F}$ dans l'énoncé précédent par le caractère $\chi = N_{F/\mathbf{Q}_p} \circ \chi_\mathcal{F}$. Comme $n \geqslant 1$, l'image de $\mathcal{G}_{F_n}$ par ce caractère est isomorphe à $\mathbf{Z}_p$. De plus, comme $n > \frac{pe_F}{p-1}$, on a $v_p(1-\chi(\sigma)) > \frac{p}{p-1}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, donc on peut utiliser les résultats précédents.

Considérons maintenant un $x \in \mathfrak{b}(\chi)$ représentant un élément de $H^0(LF_n, (\mathfrak{b}/\mathfrak{a})(\chi))$ dont l'image dans $H^1(LF_n, (\mathfrak{a}/\mathfrak{c})(\chi_\mathcal{F}))$ est nulle. Ce représentant est déterminé à un élément de $\mathfrak{a}(\chi)$ près, et la classe du cocycle $\sigma \mapsto (1-\sigma)(x)$ dans $H^1(LF_n, \mathfrak{a}(\chi))$ est l'image d'un élément de $H^1(LF_n, \mathfrak{c}(\chi))$. Autrement dit, quitte à ajouter à x un élément de $\mathfrak{a}(\chi)$, on peut supposer que le cocycle $\sigma \mapsto (1-\sigma)(x)$ est à valeurs dans $\mathfrak{c}(\chi)$. D'après la proposition 2.4.5, cela entraîne que pour tout $u_0 \in F_n$ avec

$$v_p(u_0) \geqslant c_1 + \frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)} + \inf_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau)),$$

u_0x est dans $\mathfrak{c}(\chi)$. Enfin, on a

$$\inf_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau)) = \inf_{x\in 1+\pi_F^n\mathcal{O}_F} v_p(1-N_{F/\mathbf{Q}_p}(x)),$$

donc, pour n assez grand,

$$\inf_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} v_p(1-\chi(\tau)) = \left\lfloor \frac{n}{e_F} + v_p(\mathfrak{D}_{F/\mathbf{Q}_p}) \right\rfloor.$$

Prenons alors

$$c = \frac{1}{e_F}\left\lceil e_F c_1 + \frac{1}{q^{n-1}(q-1)} + e_F v_p(\mathfrak{D}_{F/\mathbf{Q}_p}) \right\rceil,$$

et $u_0 \in F_n$ vérifiant $v_p(u_0) = \frac{n}{e_F} + c$. Si u est comme dans l'énoncé, on trouve alors

$$v_p(ux) = (v_p(u) - v_p(u_0)) + v_p(u_0x) \geqslant (v_p(\mathfrak{a}) - v_p(\mathfrak{c})) + v_p(\mathfrak{c}) = v_p(\mathfrak{a}),$$

donc $ux \in \mathfrak{a}$, d'où le corollaire. ■

3 Anneaux de Fontaine

Cette partie a pour but d'introduire les anneaux de Fontaine qui sont utilisés dans la suite, de fixer les notations, et d'énoncer certains résultats connus à leur sujet. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple [Fo82a], [Fo94a] ou [Col02].

3.1 Définitions

On note F^{nr} l'extension maximale non ramifiée de F, et F_{nr} la plus grande extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans F.

On définit $\widetilde{\mathbf{E}}$ comme l'ensemble des suites $(x^{(n)})$ d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On définit la somme $(s^{(n)})$ et le produit $(t^{(n)})$ de deux éléments $(x^{(n)})$ et $(y^{(n)})$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$ par les formules $s^{(n)} = \lim_{m\to+\infty}\left(x^{(m+n)} + y^{(m+n)}\right)^{p^m}$ et $t^{(n)} = x^{(n)}y^{(n)}$. On obtient ainsi un corps de caractéristique p, algébriquement clos, et complet pour la valuation $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ définie par $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x) = v_p(x^{(0)})$. De plus, il y a une action évidente des groupes $\mathcal{G}_{F_n}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$.

On note $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ ou $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$ (qui correspond à l'anneau R de [Fo94a]), et $\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ son idéal maximal. Le corps résiduel $k_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ est isomorphe à $\overline{\mathbf{F}_p}$.

L'anneau $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ est isomorphe à

$$\varprojlim\left(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\{v_p \geqslant \alpha\} \longleftarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\{v_p \geqslant \alpha\} \longleftarrow \cdots\right)$$

(les flèches correspondant à des élévations à la puissance p), pour tout $0 < \alpha \leqslant 1$.

On définit $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}\left[\frac{1}{p}\right]$, $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+\left[\frac{1}{p}\right]$. (L'anneau $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ correspond à $W(R)$ de [Fo94a]).

La structure de $\overline{\mathbf{F}_p}$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ donne sur $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ une structure de $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}$-algèbre. On dote $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ de la topologie produit issue de celle de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$: si $[x]$ est le représentant de Teichmüller de $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et si $\widetilde{p}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\widetilde{p}^{(0)} = p$, alors les idéaux $(p^m, [\widetilde{p}]^n)$ forment une base de voisinages de 0 dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+$. On a un morphisme d'anneaux surjectif $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+ \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, défini par

$$\theta \left(\sum_{m=0}^{+\infty} p^m \underbrace{[(x_m^{(n)})]}_{\in \widetilde{\mathbf{E}}^+} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} p^m x_m^{(0)},$$

qui se prolonge naturellement à $\widetilde{\mathbf{B}}^+$.

On définit $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ = \widetilde{\mathbf{A}}^+ \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} \mathcal{O}_F$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{1}{\pi_F}\right] = \widetilde{\mathbf{B}}^+ \otimes_{F_{\mathrm{nr}}} F$, afin d'avoir des $\mathcal{O}_F$-algèbres. On peut prolonger par linéarité θ à $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$.

L'idéal $\ker \theta \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ est alors principal, et il est engendré par tout élément $\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [x_m]$ de $\ker \theta$ vérifiant $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_0) = \frac{1}{e_F}$. En particulier, si $\widetilde{\pi_F}$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $\widetilde{\pi_F}^{(0)} = \pi_F$, alors $[\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$ engendre $\ker \theta$.

On a un automorphisme φ_F de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (et $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$) défini par

$$\varphi_F \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [(x_m^{(n)})_n] \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \pi_F^m [(x_m^{(n)})]^q.$$

On définit aussi $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}^+ / (\ker \theta)^n$. D'après [Fo82a] ou [Col02] (proposition 7.12), on sait que $\varprojlim \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ / (\ker \theta)^n$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (via le morphisme naturel de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans cet anneau). Le morphisme θ se prolonge naturellement à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel $\mathbf{C}_p$ et d'idéal maximal $\ker \theta$.

On note $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ le corps des fractions de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Notons que si ω est un générateur quelconque de $\ker \theta$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, alors on a $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \left[\frac{1}{\omega}\right]$. Le corps $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est doté de la filtration donnée par : $\mathrm{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \omega^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

Soit ω un générateur de $\ker \theta$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ (par exemple $[\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$). On note $\mathbf{A}_{\max,F}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de la sous-$\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$-algèbre de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ engendrée par 1 et $\frac{\omega}{\pi_F}$. On écrira $\mathbf{A}_{\max}$ pour $\mathbf{A}_{\max,\mathbf{Q}_p}$. On pose $\mathbf{B}_{\max,F}^+ = \mathbf{A}_{\max,F} \left[\frac{1}{\pi_F}\right]$, et $\mathbf{B}_{\max}^+ = \mathbf{B}_{\max,\mathbf{Q}_p}^+$. D'après [Col02] (proposition 7.13), $\mathbf{B}_{\max,F}^+$ est isomorphe à $F \otimes_{F_{\mathrm{nr}}} \mathbf{B}_{\max}^+$. Tous ces anneaux sont indépendants du choix du générateur ω.

Le morphisme φ_F se prolonge de manière naturelle en un endomorphisme injectif de $\mathbf{B}_{\max,F}^+$.

3.2 La valuation p-adique de $\mathbf{B}_{\max,F}^+$

Tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n]$ avec $x_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, $x_n = 0$ pour n suffisement petit. Les éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$ correspondent aux éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ qui vérifient $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant -\frac{n}{e_F}$. On peut définir une valuation $v_{\max,F}$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right]$ en posant

$$v_{\max,F} \left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} \pi_F^n [x_n] \right) = \min_{n \in \mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \right),$$

et cette valuation se prolonge par continuité à $\mathbf{A}_{\max,F}$. De plus, les éléments de $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ vérifiant $v_{\max,F}(x) \geqslant \frac{m}{e_F}$, pour m entier positif, sont exactement les éléments de $\pi_F^m \mathbf{A}_{\max,F}$. La valuation $v_{\max,F}$ redonne donc la topologie π_F-adique de $\mathbf{A}_{\max,F}$ (i.e. la topologie naturelle de $\mathbf{A}_{\max,F}$).

Enfin, on peut prolonger $v_{\max,F}$ à $\mathbf{B}_{\max,F}^+$ en posant $v_{\max,F}(\pi_F^{-m} x) = v_{\max,F}(x) - \frac{m}{e_F}$.

3.3 Les périodes d'un groupe de Lubin-Tate

On va maintenant définir dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ des périodes associés au groupe de Lubin-Tate $\mathcal{F}$ considéré.

Notons η l'élément de $\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ défini par $\eta^{(m)} = \lim_{n\to+\infty} \eta_n^{q^n/p^m}$.

Comme l'application $[\pi_F]_{\mathcal{F}} \circ \varphi_F^{-1}$ est contractante sur chacune des classes de

$$\left\{z \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_F \ / \ \theta(z) \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}\right\} \quad \text{modulo} \quad \pi_F \widetilde{\mathbf{A}}^+_F,$$

pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ la suite

$$\left(\left([\pi_F]_{\mathcal{F}} \circ \varphi_F^{-1}\right)^n ([x])\right)_n$$

converge vers un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$ noté $\{x\}_{\mathcal{F}}$ qui est l'unique élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$ dont la réduction modulo π_F est x et qui vérifie $\varphi_F(\{x\}_{\mathcal{F}}) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(\{x\}_{\mathcal{F}})$. (C'est le lemme 8.3 de [Col02]).

On pose en particulier $\varpi_{\mathcal{F}} = \{\eta\}_{\mathcal{F}}$. Alors $\frac{\varpi_{\mathcal{F}}}{\varphi_F^{-1}(\varpi_{\mathcal{F}})}$ est un générateur de $\ker\theta$ dans $\widetilde{\mathbf{A}}^+_F$, et $\varpi_{\mathcal{F}}$ lui-même engendre $\bigcap_{n\geqslant 0} \varphi_F^{-n}(\ker\theta|_{\widetilde{\mathbf{A}}^+_F})$. (Cf. proposition 8.6 dans [Col02]).

Si $\sigma \in \mathcal{G}_F$, alors on a $\sigma(\eta) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\eta)$ par construction de η, donc $\sigma(\varpi_{\mathcal{F}}) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}})$.

Posons $t_{\mathcal{F}} = \log_{\mathcal{F}}(\varpi_{\mathcal{F}}) \in \mathbf{A}_{\max,F}$. Il vérifie $\varphi_F(t_{\mathcal{F}}) = \pi_F t_{\mathcal{F}}$, et l'idéal de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ engendré par $t_{\mathcal{F}}$ est $\bigcap_{n\geqslant 0} \varphi_F^{-n}(\ker\theta|_{\mathbf{B}^+_{\max,F}})$. (Cf. proposition 8.10 dans [Col02]).

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a $\sigma(t_{\mathcal{F}}) = \chi_{\mathcal{F}}(\sigma) t_{\mathcal{F}}$.

Notons que pour tout $\rho \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbf{Q}_p})$, on peut définir de manière naturelle un morphisme d'anneaux $\underline{\rho} : \mathbf{B}^+_{\max,F} \to \mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$, dont la restriction à F est ρ et dont la restriction à $\mathbf{B}^+_{\max}$ est de la forme $\varphi^i_{\mathbf{Q}_p}$, avec $0 \leqslant i < h$ (l'action de ρ sur F_{nr} donnant la bonne valeur de i). Posons $t_{\mathcal{F},\rho} = \underline{\rho}(t_{\mathcal{F}}) \in \mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a alors $\sigma(t_{\mathcal{F},\rho}) = \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) t_{\mathcal{F},\rho}$. Ainsi, les $t_{\mathcal{F},\rho}$ constituent les analogues dans $\mathbf{B}^+_{\max,\rho(F)}$ des périodes $\xi_\rho \in \mathbf{C}_p$ définies précédemment. Contrairement à ce qui se passait dans $\mathbf{C}_p$, on a aussi une période pour $\rho = 1$ (à savoir, $t_{\mathcal{F}}$).

On peut montrer (cf. [Col02]) que $\theta(\underline{\rho}(t_{\mathcal{F}}))$ n'est nul que pour $\rho = 1$, si bien que les périodes de Hodge-Tate ξ_ρ coïncident avec les images par θ des périodes dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. De plus, $\prod_{\rho\in\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbf{Q}_p})} \underline{\rho}(t_{\mathcal{F}})$ est égal à la période t associée à $\mathbf{G_m}$, à multiplication par un élément de $(F^{\mathrm{nr}})^*$ près. En particulier, $t_{\mathcal{F}}$ divise t dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

Enfin, rappelons la suite exacte suivante (démontré dans [Col02]).

Lemme 3.3.1. *Pour tout $a \in \mathcal{O}_F$, on a la suite exacte*

$$0 \longrightarrow (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a} t_{\mathcal{F}} \longrightarrow (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = \pi_F a} \xrightarrow{\theta} \mathbf{C}_p \longrightarrow 0.$$

3.4 Cohomologie continue dans des anneaux de Fontaine

Cette partie est consacrée à énoncer quelques résultats cohomologiques intervenant dans la construction de l'application logarithme. Les démonstrations sont analogues à celle du cas cyclotomique, décrit dans [Col96] et [Col98] (chapitre IV).

Théorème 3.4.1. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors on a*

(i) $H^1(F_\infty, (\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/\operatorname{Fil}^i \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*

(ii) $H^1(F_\infty, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V) = 0$ *;*

(iii) $H^1(F_\infty, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}) \otimes_F V) = 0$ *;*

(iv) $H^1(F_\infty, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V) = 0$.

La preuve est identique à celle de [Col98] (théorème IV.3.1).

La méthode employée dans le cas cyclotomique doit être un peu adaptée pour montrer les résultats suivants.

Notons $u_{\mathcal{F}}$ l'unique élément de $\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ tel que $t_{\mathcal{F}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[u_{\mathcal{F}}^{q^{-n}}]$ (en fait, tout élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}$ a une écriture de cette forme). Il est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, et vérifie $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}$. On montre assez facilement le lemme calculatoire suivant.

Lemme 3.4.2. *Soit $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^+_F$. Alors*

(i) pour tout $k \in \mathbf{N}$, la somme $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$;

(ii) $\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}$ est dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^k}$;

(iii) on a $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\theta\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]\right)}\theta\left(\sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]x\right)}{\pi_F^{km}}\right) = \theta(x)$.

Proposition 3.4.3. *Soit V est une F-représentation de $\mathcal{G}_F$. Il existe une base du $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-espace vectoriel $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V) = \left((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V\right)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.*

Preuve : Comme dans [Col98], on montre que $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$-espace vectoriel de dimension $\dim_F V$. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_d)$ de V sur F. Il existe alors une base $(v_1, \ldots, v_d)$ de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ sur $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $(\widetilde{\mathbf{A}}^+_F \otimes_{\mathcal{O}_F} V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. Comme $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ engendre le $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V$ (cf. la proposition [Col98]), l'image par θ du déterminant de $(v_1, \ldots, v_d)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$ est non nulle. Posons alors

$$v_{i,k} = \sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]v_i\right)}{\pi_F^{km}}.$$

D'après le lemme précédent, l'image par $\frac{1}{\theta\left(\left[u_{\mathcal{F}}^{k\frac{q^2-1}{q^2}}\right]\right)}\theta$ du déterminant de $(v_{1,k}, \ldots, v_{d,k})$ dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$ tend vers l'image par θ du déterminant de $(v_1, \ldots, v_d)$ dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$, qui est non nulle. Donc, pour k assez grand, le déterminant de $(v_{1,k}, \ldots, v_{d,k})$ dans la base $(e_1, \ldots, e_d)$ sera inversible dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et $(\frac{1}{t_{\mathcal{F}}^k}v_{1,k}, \ldots, \frac{1}{t_{\mathcal{F}}^k}v_{d,k})$ est alors une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V$ formée d'éléments de $D_{\mathrm{Iw}}(V)$ (et donc, en particulier, fixes sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$), d'où la proposition. ■

Lemme 3.4.4. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors l'image de $H^1(F_\infty, V)$ dans $H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V))$ est nulle.*

Preuve : Soit $\tau \mapsto c_\tau$ un cocycle représentant un élément de $H^1(F_\infty, V)$. Comme $\mathcal{G}_{F_\infty}$ est compact, on peut trouver un réseau T de V, stable sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$, tel que c_τ soit à valeurs dans T. Alors il existe un $c \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \otimes_{\mathcal{O}_F} V$ (et même dans $W(\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}) \otimes_{\mathcal{O}_{F_{\mathrm{nr}}}} T$) tel que l'on ait $[u_{\mathcal{F}}]c_\tau = (1-\tau)(c)$ pour tout $\tau \in \mathcal{G}_{F_\infty}$.

Posons maintenant

$$c' = \frac{1}{\pi_F t_{\mathcal{F}}} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{\varphi_F^m\left([u_{\mathcal{F}}^{q-1}]c\right)}{\pi_F^m}.$$

Comme $v_{\max,F}([u_{\mathcal{F}}^{q-1}]) > 0$, cette série converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F} \otimes_F V$, et elle définit un c' qui est dans $t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V)$. De plus, si $\tau \in \mathcal{G}_{F_\infty}$, on a $(1-\tau)(c') = c_\tau$, d'où le lemme. ■

Théorème 3.4.5. *Si V est une F-représentation de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, alors on a :*

(i) $H^1(F_\infty, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F^i} \otimes_F V)) = 0$ quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;

(ii) $H^1(F_\infty, (\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V) = 0$.

La preuve se fait comme dans [Col98] (théorème IV.3.1), à partir du lemme précédent.

4 Le lemme principal

Cette partie a pour objectif de démontrer le lemme suivant.

Lemme 4.0.6. *Soit $a \in F$. Il existe une constante $C \in \mathbf{R}$ (dépendant de F et de a) telle que pour tout $A \in \mathbf{R}$ il existe un entier $n_0 \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ vérifiant*

$$v_{\max,F}\left((1-\sigma)(x)\right) \geqslant A + v_{\max,F}(x) \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$$

on ait :

$$v_{\max,F}\left((1-\sigma)(x)\right) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}.$$

Notons que si l'on remplace $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ par $\mathbf{C}_p$, le résultat devient faux. En effet, pour tout $n > 0$, on peut prendre x dans $\mathcal{O}_{F_n}$ tel que $\inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}} v_p((1-\sigma)(x_n)) = \frac{1}{e_F(q-1)}$ (il suffit de prendre $x = \eta_n$).

Si $v_p(a) < 0$, comme on a $v_{\max,F}(\varphi_F(x)) \geqslant v_{\max,F}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$ (ceci découle immédiatement de la construction de $v_{\max,F}$), on obtient $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a} = \{0\}$. Le lemme est donc trivial dans ce cas.

Si $v_p(a) = 0$, alors $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ est contenu dans F^{nr} d'après le lemme suivant.

Lemme 4.0.7. *Si $a \in \mathcal{O}_F^*$, alors $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ est un sous-F-espace vectoriel de dimension 1 de F^{nr}.*

Preuve : Les modules $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \overline{k_F})$ et $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \overline{k_F}^*)$ sont nuls (Hilbert 90), donc, par dévissage, $H^1(\mathrm{Gal}(\overline{k_F}/k_F), \mathcal{O}^*_{F^{\mathrm{nr}}}) = 0$, si bien qu'il existe un $x' \in F^{\mathrm{nr}}$ tel que $\varphi_F(x') = ax'$. Alors $x'^{-1}x$ est un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1}$, c'est-à-dire de F (cf. [Col02], proposition 8.2). ■

Le lemme 4.0.6 s'en déduit alors (pour $v_p(a) = 0$), grâce au résultat suivant.

Lemme 4.0.8. *Soit $x \in F^{\mathrm{nr}}$, vérifiant*

$$v_p(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

pour un certain $A \in \frac{1}{e_F}\mathbf{Z}$ et un certain $n \geqslant 1$. Alors on a

$$v_p(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_F).$$

Preuve : En effet, quitte à multiplier x par une puissance de π_F, on peut supposer $v_p(x) \geqslant 0$. On procède alors par récurrence sur A.

Pour $A \leqslant 0$, le résultat est immédiat.

Si $A > 0$, plaçons-nous modulo π_F. La classe de x est alors un élément de k_F, qui est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$. Or l'extension F_n/F est totalement ramifiée, donc elle est linéairement disjointe de F^{nr}/F, donc la classe de x est en fait fixe sous $\mathcal{G}_F$, donc elle est dans k_F. Quitte à soustraire à x un élément de $\mathcal{O}_F$, on peut donc supposer $v_p(x) \geqslant \frac{1}{e_F}$. On est alors ramené à l'hypothèse de récurrence en divisant x par π_F. ■

Le cas $v_p(a) \leqslant 0$ ayant été traité, on suppose dorénavant $v_p(a) > 0$. La preuve fonctionne par récurrence sur $v_p(a) \in \frac{1}{e_F}\mathbf{N}$.

On considère donc un $A \in \mathbf{R}$. L'entier n_0 considéré sera n'importe quel entier assez grand pour vérifier :

(i) les hypothèses du corollaire 2.4.6) ;

(ii) $n_0 \geqslant 1 + Ae_F$ (afin que $t_{\mathcal{F}}$ soit fixe modulo les éléments de valuation supérieure ou égale à A, sous l'action de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}$).

Puis on considère un $n \geqslant n_0$ et un $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ tels que

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

On veut montrer que l'on a

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}),$$

$C \in \mathbf{R}$ ne dépendant que de F et de a (en particulier, C ne dépend pas de A, n ou x).

4.1 Réductions préliminaires

La première étape est une succession de réductions visant à passer d'un x quelconque dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$ à un élément dont l'image par θ est dans le noyau de $\mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$.

Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a

$$v_p(\theta(x) - \sigma(\theta(x))) = v_p(\theta(x - \sigma(x))) \geqslant v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x).$$

Rappelons le résultat suivant, dû à Ax (cf. [Ax70]).

Théorème 4.1.1. *Soit $x \in \mathbf{C}_p$, et soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Supposons que l'on ait $v_p(x - \sigma(x)) \geqslant A$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_L$. Alors il existe un $y \in L$ tel que $v_p(x - y) \geqslant A - \frac{p}{(p-1)^2}$.*

En l'appliquant à $\theta(x)$, on peut donc écrire

$$\theta(x) = y_0 + r_0, \quad \text{avec } y_0 \in F_n \text{ et } r_0 \in \mathbf{C}_p,\ v_p(r_0) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2}.$$

L'application $\theta : (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a} \to \mathbf{C}_p$ est un morphisme surjectif et continu d'espaces de Banach p-adiques. Elle a donc une section linéaire continue $s : \mathbf{C}_p \to (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a}$. Notons que l'on peut choisir s ne dépendant que de F et a. Comme s est continue, il existe une constante $c_0 \in \mathbf{R}$ telle que $v_{\max,F}(s(y)) \geqslant v_p(y) - c_0$, pour tout $y \in \mathbf{C}_p$.

Posons donc $x_1 = x - s(r_0)$. On a alors

(i) $v_{\max,F}(x_1 - \sigma(x_1)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;

(ii) $\theta(x_1) = y_0 \in F_n$;

(iii) $v_{\max,F}(x - x_1) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0$;

(iv) $v_{\max,F}(x_1) \geqslant v_{\max,F}(x) + \min\left(A - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0, 0\right)$.

Soient $\tau_0, \ldots, \tau_{q-1}$ des représentants des classes de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}/\mathcal{G}_{F_n}$. Posons $r_1 = \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i(x_1)$. On a alors $\theta(r_1) = \frac{1}{q}\operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(y_0)$.

Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$, on note τ_i' l'unique élément de $\{\tau_0, \ldots, \tau_{q-1}\}$ tel que ${\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i \in \mathcal{G}_{F_n}$. (Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a $\tau_i' = \tau_i$). On trouve alors :

$$\begin{aligned}(1-\sigma)(r_1) &= r_1 - \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}(\sigma\tau_i)(x_1) \\ &= r_1 - \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(x_1) + \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(1-{\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i)(x_1) \\ &= \frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}\tau_i'(1-{\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i)(x_1).\end{aligned}$$

Comme ${\tau_i'}^{-1}\sigma\tau_i \in \mathcal{G}_{F_n}$, on en déduit donc

$$v_{\max,F}(r_1 - \sigma(r_1)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h.$$

Posons $x_2 = x_1 - r_1$. On a donc alors :

(i) $v_{\max,F}(x_2 - \sigma(x_2)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;

(ii) $\theta(x_2) = y_0 - \frac{1}{q}\operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(y_0) \in F_n$;

(iii) $\theta(x_2) \in \ker \operatorname{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$;

(iv) $v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant \min\left(v_{\max,F}(x_2 - \sigma(x_2)), A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h\right)$, quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$;

(v) $v_{\max,F}(x_2) \geqslant \min\left(A - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0, 0\right) + v_{\max,F}(x) - h$.

On est donc ramené à trouver une minoration convenable de $v_{\max,F}((1-\sigma)(x_2))$. C'est l'objet des deux lemmes suivants.

4.2 Deux lemmes différentiels

Rappelons que si K est une extension algébrique de F, alors la différente $\mathfrak{D}_{K/F}$ est l'idéal annulateur de $\Omega^1_{\mathcal{O}_K/\mathcal{O}_F}$ (cf. [Ser68], chapitre III, paragraphe 7, proposition 14). On montre aisément que l'on a ici $v_p(\mathfrak{D}_{F_n/F}) = \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right)$.

Lemme 4.2.1. *Soient $M \in \mathbf{N}$, $y \in \mathcal{O}_{F_n}$ et $\widetilde{y} \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ tel que $\theta(\widetilde{y}) = y$. Notons $dy \in \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ la différentielle de Kähler de y. Il existe des constantes $n_1 \in \mathbf{N}$ et c_1 (dépendant seulement de F) telle que, si $n \geqslant n_1$ et si $\widetilde{y}$ est fixe dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+/(\pi_F^M, ([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2)$ sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$, alors dy est annulé par tout élément de F_n de valuation supérieure ou égale à $\frac{n-M}{e_F} + c_1$.*

(Le n_1 est en fait la borne inférieure apparaissant dans le corollaire 2.4.6, si bien que l'on a $n_0 \geqslant n_1$).

Preuve : Comme $y \in \mathcal{O}_{F_n}$, dy est annulé par $\mathfrak{D}_{F_n/F}$ (cf. [Ser68], chapitre III, paragraphe 7, proposition 14). D'autre part, d'après [Fo82b] (théorème 1), $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ est isomorphe à $\left(\overline{F}/\mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})$, où

$$\mathfrak{a} = \left\{ z \in \overline{F} \;\middle/\; v_p(z) \geqslant -v_p(\mathfrak{D}_{F/F_{\mathrm{nr}}}) - \frac{1}{e_F(q-1)} \right\}.$$

Ceci permet de considérer dy comme un élément de $\left(\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})$.

D'autre part, d'après [Col94], $\Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$ est isomorphe à $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \;/\; (\omega\widetilde{\mathbf{A}}^+_F + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})$, l'isomorphisme faisant correspondre dy et $\widetilde{y} - y$. Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$, on a par hypothèse :

$$(1-\sigma)(\widetilde{y}) \in \pi_F^M \widetilde{\mathbf{A}}^+_F + \omega^2 \widetilde{\mathbf{A}}^+_F \qquad \text{et} \qquad (1-\sigma)(y) = 0,$$

donc $(1-\sigma)(\widetilde{y} - y)$ est un élément de $\pi_F^M \widetilde{\mathbf{A}}^+_F + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$. D'autre part, c'est un élément de $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, si bien qu'il est en fait dans $\pi_F^M \omega \widetilde{\mathbf{A}}^+_F + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$.

Considérons maintenant la classe de $\pi_F^{-M}(\widetilde{y} - y)$ dans $\mathrm{Fil}^1\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \;/\; (\omega\widetilde{\mathbf{A}}^+_F + \mathrm{Fil}^2\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}) \simeq \Omega^1_{\mathcal{O}_{\overline{F}}/\mathcal{O}_F}$. Elle est annulée par $\pi_F^M \mathfrak{D}_{F_n/F}$, et elle est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$, donc c'est un élément de

$$H^0\left(F_n, \left((\pi_F^{-M}\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}) \;/\; \mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})\right).$$

En multipliant par π_F^M, on trouve alors que dy est l'image d'un élément de

$$H^0\left(F_n, \left(\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \pi_F^M\mathfrak{a}\right)(\chi_{\mathcal{F}})\right)$$

dans la suite exacte de cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0\left(F_n, \tfrac{\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \longrightarrow H^0\left(F_n, \tfrac{\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \longrightarrow H^0\left(F_n, \tfrac{\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \longrightarrow H^1\left(F_n, \tfrac{\mathfrak{a}}{\pi_F^M\mathfrak{a}}(\chi_{\mathcal{F}})\right) \longrightarrow \cdots$$

On trouve donc que dy est un élément du noyau du morphisme

$$H^0(F_n, (\mathfrak{D}^{-1}_{F_n/F}\mathfrak{a} \;/\; \mathfrak{a})(\chi_{\mathcal{F}})) \longrightarrow H^1(F_n, (\mathfrak{a} \;/\; \pi_F^M\mathfrak{a})(\chi_{\mathcal{F}})).$$

Le corollaire 2.4.6 démontre alors le lemme 4.2.1. ■

Lemme 4.2.2. *Il existe une constante $c_2 \in \mathbf{R}$, $c_2 \geqslant 0$, dépendant seulement de F, telle que si $y \in \mathcal{O}_{F_n}$ est tel que $dy = 0$, alors y est somme d'un élément de F_{n-1} et d'un élément de F_n de valuation supérieure ou égale à $v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - c_2 = \frac{1}{e_F}\left(n - \frac{1}{q-1}\right) - c_2$.*

Preuve : Comme $1, \pi_{F_n}, \pi^2_{F_n}, \ldots, \pi_{F_n}^{q^{n-1}(q-1)-1}$ est une base de $\mathcal{O}_{F_n}$ sur $\mathcal{O}_F$, on peut écrire y sous la forme

$$y = \sum_{i=0}^{q^{n-1}(q-1)-1} y_i \pi^i_{F_n},$$

avec $y_i \in \mathcal{O}_F$. On a alors

$$0 = dy = \sum_{i=1}^{q^{n-1}(q-1)-1} i y_i \pi_{F_n}^{i-1}\, d\pi_{F_n},$$

donc

$$\sum_{i=1}^{q^{n-1}(q-1)-1} i y_i \pi_{F_n}^{i-1} \in \mathfrak{D}_{F_n/F},$$

donc

$$v_p(i y_i) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - 1.$$

En particulier, si $q \nmid i$, on a $v_p(y_i) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - h$.

D'autre part, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\pi_{F_n}^q \equiv \pi_{F_{n-1}} \pmod{\pi_F},$$

donc, par récurrence,

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qp^k} - \pi_{F_{n-1}}^{p^k}\right) \geqslant \begin{cases} \frac{p^k}{e_F} & \text{si } k \leqslant \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \\ k - \left\lfloor \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \right\rfloor + \frac{p^{\left\lfloor \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p} \right\rfloor}}{e_F} & \text{sinon,} \end{cases}$$

donc

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qp^k} - \pi_{F_{n-1}}^{p^k}\right) \geqslant k - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p},$$

donc, pour tout $j \geqslant 1$,

$$v_p\left(\pi_{F_n}^{qj} - \pi_{F_{n-1}}^{j}\right) \geqslant v_p(j) - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}.$$

Si $q \mid i$, on trouve donc

$$v_p\left(y_i \pi_{F_n}^{i} - y_i \pi_{F_{n-1}}^{i/q}\right) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - 1 - \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p},$$

donc, finalement,

$$v_p\left(y - \underbrace{\sum_{j=0}^{q^{n-2}(q-1)-1} y_{qj} \pi_{F_{n-1}}^{j}}_{\in F_{n-1}}\right) \geqslant v_p\left(\mathfrak{D}_{F_n/F}\right) - \max\left(h, 1 + \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}\right),$$

d'où le lemme, avec $c_2 = \max\left(h, 1 + \frac{\log\left(\frac{p}{p-1}e_F\right)}{\log p}\right)$. ■

4.3 Fin de la preuve

Appliquons le lemme 4.2.1 à la situation décrite lors des réductions préliminaires. Posons $N = -\lfloor e_F v_{\max,F}(x_2) \rfloor$, afin d'avoir $\pi_F^{N+1} x_2 \in \pi_F \mathbf{A}_{\max,F}^{\varphi_F = a}$, et donc $\theta(\pi_F^{N+1} x_2) \in \pi_F \mathcal{O}_{F_n}$.

Par construction de $\mathbf{A}_{\max,F}$, on peut trouver un x_3 dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ qui est congru à $\pi_F^{N+1} x_2$ modulo $([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2 \mathbf{A}_{\max,F}$. Notons que la classe de x_3 modulo

$$\left(\pi_F^{\left\lfloor \left(A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h \right) e_F + N + 1 \right\rfloor}, ([\widetilde{\pi_F}] - \pi_F)^2 \right)$$

est alors fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_n}$.

Le lemme 4.2.1, appliqué avec $y = \theta(x_3) = \theta(\pi_F^{N+1} x_2)$ et $\widetilde{y} = x_3$, donne que dy est annulé par tout élément de F_n de valuation supérieure ou égale à

$$\begin{aligned} \frac{n}{e_F} + c_1 - \frac{1}{e_F} &\left\lfloor \left(A + v_{\max,F}(x) - \frac{p}{(p-1)^2} - c_0 - h \right) e_F + N + 1 \right\rfloor \\ &\leqslant \frac{n}{e_F} + c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - \frac{N}{e_F} - v_{\max,F}(x). \end{aligned}$$

Si l'on applique le lemme 4.2.2 à

$$\begin{aligned} &\pi_F^{\left\lceil n - N + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil} \theta(x_3) \\ &\qquad = \pi_F^{\left\lceil n + 1 + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil} \theta(x_2) \end{aligned}$$

(dont on sait que la différentielle est nulle), on trouve que $\theta(x_2)$ est somme d'un élément y_4 de F_{n-1} et d'un élément r_4 de F_n avec

$$\begin{aligned} v_p(r_4) &\geqslant \frac{1}{e_F} \left(n - \frac{1}{q-1} \right) - c_2 - \frac{1}{e_F} \left\lceil n + 1 + e_F \left(c_0 + c_1 + \frac{p}{(p-1)^2} + h - A - v_{\max,F}(x) \right) \right\rceil \\ &\geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - h. \end{aligned}$$

D'autre part, comme $\theta(x_2) \in \ker \mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}$, on a

$$y_4 = -\frac{1}{q} \mathrm{Tr}_{F_n/F_{n-1}}(r_4),$$

donc

$$v_p(y_4) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - 2h,$$

puis

$$v_p(\theta(x_2)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - \frac{1}{e_F(q-1)} - \frac{2}{e_F} - c_0 - c_1 - c_2 - \frac{p}{(p-1)^2} - 2h.$$

Posons $x_4 = x_2 - s(\theta(x_2))$, où s est la section de $\theta : (\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F = a} \to \mathbf{C}_p$ utilisée ci-dessus pour définir x_1. Pour simplifier les notations, posons aussi

$$c_4 = \frac{1}{e_F(q-1)} + \frac{2}{e_F} + 2c_0 + c_1 + c_2 + \frac{p}{(p-1)^2} + 2h$$

On a alors :

(i) $v_{\max,F}(x_4 - \sigma(x_4)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - c_4$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;

(ii) $\theta(x_4) = 0$;

(iii) $v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant \min\left(v_{\max,F}(x_4 - \sigma(x_4)), A + v_{\max,F}(x) - c_4\right)$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$;

(iv) $v_{\max,F}(x_4) \geqslant \min(A - c_4, -h) + v_{\max,F}(x)$.

Comme $\theta(x_4) = 0$, d'après le lemme 3.3.1, x_4 est multiple de $t_{\mathcal{F}}$. Posons donc

$$x_5 = \frac{x_4}{t_{\mathcal{F}}} \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a/\pi_F}.$$

On a alors, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$:

$$(1-\sigma)(x_4) = t_{\mathcal{F}}(1-\sigma)(x_5) \ + \ \sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}),$$

donc

$$\begin{aligned} v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)) &\geqslant -v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) + \min\left(v_{\max,F}(x_4 - \sigma(x_4)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right) \\ &= -\frac{q}{e_F(q-1)} + \min\left(v_{\max,F}(x_4 - \sigma(x_4)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right) \end{aligned}$$

et

$$v_{\max,F}(x_4 - \sigma(x_4)) \geqslant \min\left(\frac{q}{e_F(q-1)} + v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)), v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}}))\right).$$

Or on a

$$\begin{aligned} &v_{\max,F}(\sigma(x_5)) = v_{\max,F}(x_5) \\ &\qquad = v_{\max,F}(x_4) - v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) \geqslant \min(A - c_4, -h) + v_{\max,F}(x) - \frac{q}{e_F(q-1)}, \end{aligned}$$

et on a choisi $n_0 \geqslant 1 + Ae_F$ et $n_0 \geqslant 1$, donc

$$v_{\max,F}((1-\sigma)(t_{\mathcal{F}})) \geqslant \max(A, 0),$$

donc

$$\begin{aligned} v_{\max,F}(\sigma(x_5)(1-\sigma)(t_{\mathcal{F}})) &\geqslant \min(A - h, A - c_4) + v_{\max,F}(x) - \frac{q}{e_F(q-1)} \\ &\geqslant A + v_{\max,F}(x) - c_4 - \frac{q}{e_F(q-1)}. \end{aligned}$$

On obtient donc :

(i) $x_5 \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a/\pi_F}$;

(ii) $v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - c_4 - 2\frac{q}{e_F(q-1)}$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}$;

(iii) $v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant \min\left(v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)) - \frac{q}{e_F(q-1)}, A + v_{\max,F}(x) - c_4 - \frac{q}{e_F(q-1)}\right)$ quel que soit $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}$;

(iv) $v_{\max,F}(x_5) \geqslant \min(A - c_4, -h) + v_{\max,F}(x) - \frac{q}{e_F(q-1)}$.

On s'est donc ramené à un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a/\pi_F}$, qui vérifie des hypothèses analogues à celles vérifiées par x. La constante A est remplacé par $A + v_{\max,F}(x) - c_4 - 2\frac{q}{e_F(q-1)} - v_{\max,F}(x_5)$, qui est inférieur à A puisque $c_4 \geqslant h$. Par hypothèse de récurrence, on trouve qu'il existe une constante $c_5 \in \mathbf{R}$ (le C associé à a/π_F) telle que pour n assez grand (en fait, $n \geqslant n_0$, avec le n_0 choisi ci-dessus, convient), on a

$$v_{\max,F}(x_5 - \sigma(x_5)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - c_4 - 2\frac{q}{e_F(q-1)} - c_5 \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}.$$

Finalement, en se servant du troisième point ci-dessus, on obtient

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A + v_{\max,F}(x) - C \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}},$$

avec

$$C = \max\left(c_4 + 2\frac{q}{e_F(q-1)} + c_5, c_4 + \frac{q}{e_F(q-1)}\right),$$

d'où la récurrence. (En détaillant plus les calculs, on trouve $C = \left(e_F c_4 + 2\frac{q}{q-1}\right) v_p(a)$). Ceci conclut la preuve du lemme 4.0.6.

5 L'application « logarithme de Perrin-Riou »

5.1 Distributions p-adiques

Commençons par rappeler quelques résultats sur les distributions p-adiques, adaptés de [Col96] au cas considéré ici.

On considère ici X un ouvert compact de $\mathcal{O}_F$. On note $\mathrm{LA}(X)$ l'ensemble des fonctions localement analytiques sur X.

Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que les boules $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$, avec $a \in X$, soient contenues dans X (ce qui est le cas pour tout n assez grand, par compacité de X), on note $\mathrm{LA}_n(X)$ l'ensemble des fonctions qui sont développables en série entière sur chacune des boules $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$. Alors $\mathrm{LA}(X)$ est la réunion des $\mathrm{LA}_n(X)$.

Soit $f \in \mathrm{LA}_n(X)$. Par définition, pour tout $a \in X$, f se développe en série entière sur la boule $a + \pi_F^n \mathcal{O}_F$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j(a)(x-a)^j.$$

On munit alors $\mathrm{LA}_n(X)$ de la norme définie par

$$\|f\|_{\mathrm{LA}_n} = \sup_{a \in X} \sup_{j \in \mathbf{N}} \left| b_j(a) \pi_F^{nj} \right|.$$

Notons que $\sup_{j \in \mathbf{N}} |b_j(a)\pi_F^{nj}|$ ne dépend pas du choix de a dans une boule donnée (mais il peut bien sûr dépendre de la boule considérée).

Pour une fonction $f \in \mathrm{LA}(X)$ donnée, la suite $(\|f\|_{\mathrm{LA}_n})_n$ est décroissante.

Si B est un espace de Banach sur F, on définit l'espace des distributions continues sur X à valeurs dans B, $\mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X, B)$, comme l'espace des homomorphismes F-linéaires continus de $\mathrm{LA}(X)$ (muni de la topologie de la limite inductive) dans B.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{LA}_n}$ sur $\mathrm{LA}_n(X)$ donne une norme sur $\mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X, B)$:

$$\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n} = \sup_{f \in \mathrm{LA}_n(X) \setminus \{0\}} \frac{\left\| \int_X f\, \mu \right\|_B}{\|f\|_{\mathrm{LA}_n}} \qquad (\forall \mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X, B)).$$

Pour une distribution continue donnée μ, la suite $(\|\mu\|_{\mathrm{LA}_n})_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante.

Posons $\mathbf{R}^- = \{r^- \,/\, r \in \mathbf{R}\}$, et définissons une application $\iota : \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^- \to \{\pm 1\}$ par $\iota(r) = +1$ si $r \in \mathbf{R}$ et $\iota(r) = -1$ si $r \in \mathbf{R}^-$. On peut munir $\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$ d'une relation d'ordre total en posant que r^- est strictement inférieur à tous les réels supérieurs ou égaux à r, et strictement supérieur à tous les réels strictement plus petits que r. Enfin, on dira qu'une suite est $(+1)$-bornée si elle est bornée, et (-1)-bornée si elle tend vers 0.

Pour tout $r \in \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$, on définit l'espace des distributions tempérées d'ordre r, sur X et à valeurs dans B, par

$$\mathcal{D}_r(X,B) = \left\{\mu \in \mathcal{D}_{\mathrm{cont}}(X,B) \;\Big/\; \text{la suite } \left(\|\pi_F^{nr}\mu\|_{\mathrm{LA}_n}\right)_n \text{ est } \iota(r)\text{-bornée}\right\}.$$

On peut munir $\mathcal{D}_r(X,B)$ d'une norme $\|\cdot\|_r$ en posant

$$\|\mu\|_r = \sup_{n\in\mathbf{N}} \|\pi_F^{nr}\mu\|_{\mathrm{LA}_n}\,.$$

Notons que si $r < 0$, alors $\mathcal{D}_r(X,B)$ est réduit à la distribution nulle.

Le lemme suivant découle des théorèmes 3.4.1 et 3.4.5 (cf. [Col96] et [Vis76], ainsi que la preuve du lemme VI.3.2 dans [Col98]).

Lemme 5.1.1. *Soient V une F-représentation de $\mathcal{G}_F$ et $r \in \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$. On a :*

(i) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/\operatorname{Fil}^i \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V)) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*

(ii) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_F V)) = 0$ *;*

(iii) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes_F V)) = 0$ *;*

(iv) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)) = 0$ *;*

(v) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-i}((\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{\varphi_F=\pi_F^i}\otimes_F V))) = 0$ *quel que soit $i \in \mathbf{N}^*$;*

(vi) $H^1(F_\infty, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, (\mathbf{B}_{\max,F}^+[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V)) = 0.$

5.2 Construction de l'application logarithme

On va en fait montrer deux résultats assez proches, correspondant à deux applications « logarithme » apparentées.

Définissons $H^1_{e,F}(K_n,V)$ et $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K_n,V)$ comme dans l'introduction.

Théorème 5.2.1. *Soit K une extension finie de F. Soit V une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_K$, soit $r \in \mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$ tel que $r < [F:\mathbf{Q}_p]$, et soit $\mu \in H^1(K, \mathcal{D}_r(\Gamma_K, V))$ tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}} \mu \in H^1_{e,F}(K_n,V) \qquad \textit{quel que soit } n \geqslant 0.$$

Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle continu représentant μ. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, soit

$$c_n \in (\mathbf{B}_{\max,F}^+[t^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n = \int_{\Gamma_{K_n}} \mu_\tau \qquad \textit{quel que soit } \tau \in \mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général $q^n c_n$ converge dans l'espace

$$\left((\mathbf{B}_{\max,F}^+[t^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V\right) \Big/ W,$$

vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}/W$*, où*

$$W=\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\Big((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V\Big)^{\mathcal{G}_{K_n}}$$

est de dimension finie.

Le second résultat est le raffinement suivant. (Notons que $\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}]\subset\mathbf{B}^+_{\max,F}[t^{-1}]$).

Théorème 5.2.2. *Soit* K *une extension finie de* F*. Soit* V *une* F*-représentation de de Rham de* $\mathcal{G}_K$*, soit* $r\in\mathbf{R}\cup\mathbf{R}^-$ *tel que* $r<[F:\mathbf{Q}_p]$*, et soit* $\mu\in H^1(K,\mathcal{D}_r(\Gamma_K,V))$ *tel que*

$$\int_{\Gamma_{K_n}}\mu\in H^1_{e,F,\mathrm{id}}(K_n,V)\qquad \textit{quel que soit } n\geqslant 0.$$

Soit $\tau\mapsto\mu_\tau$ *un cocycle continu représentant* μ*. Pour tout* $n\in\mathbf{N}$*, soit*

$$c_n\in(\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V$$

tel que

$$(1-\tau)c_n=\int_{\Gamma_{K_n}}\mu_\tau\qquad \textit{quel que soit } \tau\in\mathcal{G}_{K_n}.$$

Alors la suite de terme général q^nc_n *converge dans l'espace*

$$\Big((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V\Big)\Big/ W,$$

vers un élément de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V)^{\mathcal{G}_{K_\infty}}/W$*, où*

$$W=\bigoplus_{n\in\mathbf{N}}\Big((\mathbf{B}^+_{\max,F}[t_{\mathcal{F}}^{-1}])^{\varphi_F=1}\otimes_F V\Big)^{\mathcal{G}_{K_n}}$$

est de dimension finie.

Notons que c_n est bien défini modulo W, dans les deux cas.

Alors que le premier énoncé peut être relié relativement aisément aux séries de Coleman, pour le second il n'est pas tout à fait clair qu'il existe des $\mu\in H^1(K,\mathcal{D}_r(\Gamma_K,V))$ non nuls qui en vérifient les hypothèses. Cette question n'est pas résolue ici, mais il semble possible de relier les deux énoncés de manière à prouver que le second a un contenu non trivial.

Quitte à remplacer V par la représentation induite à $\mathcal{G}_F$, on peut supposer $K=F$, ce que l'on fait ici.

Dans la suite de cette partie, on notera T la période t ou la période $t_{\mathcal{F}}$, afin de démontrer les deux énoncés simultanément.

D'après le lemme 5.1.1, on a

$$H^1(F_\infty,\mathcal{D}_r(\Gamma_F,t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}\otimes_F V)))=0.$$

On obtient donc le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} & & H^1(F,\mathcal{D}_r(\Gamma_F,V)) \\ & & \downarrow \\ H^1(\Gamma_F,\mathcal{D}_r(\Gamma_F,((t_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1}\otimes V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}})) & \xrightarrow{\sim} & H^1(F,\mathcal{D}_r(\Gamma_F,((t_{\mathcal{F}}^{-1}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1}\otimes V)))\to 0 \end{array}$$

Si μ est comme dans l'énoncé du théorème 5.2.2, soit $\mu' \in H^1(\Gamma_F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, \mathrm{Fil}^{-1} D_{\mathrm{Iw}}(V)))$ ayant même image que μ dans $H^1(F, \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V)))$, et soient $\tau \mapsto \mu'_\tau$ un cocycle représentant μ' et $\nu \in \mathcal{D}_r(\Gamma_F, t_{\mathcal{F}}^{-1}((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F} \otimes_F V)))$ tels que $\mu_\tau - \mu'_\tau = (1-\tau)\nu$. Posons

$$u_n = c_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \nu \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V,$$

de sorte que

$$(1-\tau)u_n = \int_{\Gamma_{F_n}} \mu'_\tau \qquad (\forall \tau \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

et donc en particulier $u_n \in ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Comme ν est d'ordre r et $r < [F : \mathbf{Q}_p]$, on a $\lim_{n\to+\infty} q^n \int_{\Gamma_{F_n}} \nu = 0$, et il suffit donc de montrer que la suite $(q^n u_n)$ converge.

D'autre part, si $T = t$, on a

$$\int_{\Gamma_{F_n}} \mu \in H^1_{e,F}(F_n, V),$$

et $H^1_{e,F}(F_n, V)$ est l'image de $F_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V)$ par l'exponentielle de Bloch-Kato, donc

$$u_n \in F_n \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V.$$

De même, si $T = t_{\mathcal{F}}$, on a $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu \in H^1_{e,F,\mathrm{id}}(F_n, V)$, et $H^1_{e,F,\mathrm{id}}(F_n, V)$ est l'image de $F_n \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V)$ par l'exponentielle de Bloch-Kato, donc

$$u_n \in F_n \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V \subset \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F D_{\mathrm{dR}}(V) + \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_F V.$$

Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{Fil}^{-k} D_{\mathrm{dR}}(V) = D_{\mathrm{dR}}(V)$, alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D_{\mathrm{dR}}(V) \subset T^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et, comme

$$T^{-k}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cap (\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} = (T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1},$$

on a dans les deux cas $u_n \in ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)$. On est donc ramené à montrer la proposition suivante.

Proposition 5.2.3. *Soient $\mu \in H^1(\Gamma_F, \mathcal{D}_{1^-}(\Gamma_F, ((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}))$ et $k \in \mathbf{N}^*$ tels que pour tout $n \geqslant 1$ l'image de $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu$ dans $H^1(\Gamma_{F_n}, ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}})$ soit nulle. Soit $\tau \mapsto \mu_\tau$ un cocycle représentant μ, et pour tout $n \geqslant 1$ soit $u_n \in ((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ tel que $\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau = (1-\tau)u_n$.*

Alors la suite de terme général $q^n u_n$ converge dans $((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}} \ / \ W$.

Soient $\sigma \in \Gamma_{F_{n-1}}$ et $\tau \in \Gamma_{F_n}$. On a $\mu_{\sigma^{-1}\tau} = \mu_{\sigma^{-1}} + \sigma^{-1}\mu_\tau$ et $\mu_{\sigma^{-1}\tau} = \mu_{\tau\sigma^{-1}} = \mu_\tau + \tau\mu_{\sigma^{-1}}$, donc $\sigma^{-1}\mu_\tau = \mu_\tau - (1-\tau)\mu_{\sigma^{-1}}$, puis

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma\Gamma_{F_n}} \mu_\tau &= \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \sigma^{-1}\mu_\tau\right) \\
&= \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau\right) - \sigma(1-\tau)\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right) \\
&= \sigma(1-\tau)\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right),
\end{aligned}$$

donc

$$(1-\tau)u_{n-1} = (1-\tau) \sum_{\sigma\in\Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \sigma\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right),$$

donc

$$u_{n-1} = \sum_{\sigma\in\Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \sigma\left(u_n - \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right) \pmod W,$$

donc

$$q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1} = q^{n-1} \sum_{\sigma\in\Gamma_{F_{n-1}}/\Gamma_{F_n}} \left((1-\sigma)u_n + \sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_{\sigma^{-1}}\right)\right).$$

Comme $\sigma \mapsto \mu_{\sigma^{-1}}$ est une application continue du compact Γ_F dans les distributions d'ordre r, avec $r < [F:\mathbf{Q}_p]$, la suite de terme général $q^n\sigma\left(\int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau\right)$ tend vers 0. Il suffit donc de montrer que si (σ_n) est une suite d'éléments de Γ_F vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{F_{n-1}}$ alors la suite de terme général $q^n(1-\sigma_n)u_n$ tend vers 0.

Si $\tau \in \Gamma_{F_n}$, on a $(1-\tau)u_n = \int_{\Gamma_{F_n}} \mu_\tau$, et μ_τ varie dans un compact des distributions d'ordre r, $r < [F:\mathbf{Q}_p]$. On en déduit donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{\tau\in\mathcal{G}_{F_n}} \|(1-\tau)(q^n u_n)\| = 0.$$

Le problème est alors, sachant que $q^n u_n$ « bouge peu » sous $\mathcal{G}_{F_n}$, de montrer qu'il « ne bouge pas beaucoup plus » sous l'action de $\mathcal{G}_{F_{n-1}}$.

D'après la proposition 3.4.3, il existe une base $e_1,\dots,e_d$ de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ formée d'éléments de $((\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. Pour pouvoir travailler sur les coefficients, on souhaiterait décomposer $q^n u_n$ comme une combinaison linéaire des e_i à coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1}$. Cependant, ces coefficients sont a priori dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$, et il va falloir multiplier $q^n u_n$ par un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$ pour obtenir des coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$.

Soit $v_1,\dots,v_d$ une base de V sur $\mathbf{Q}_p$. Posons $e_i = \sum_{j=1}^d a_{i,j}v_j$, avec $a_{i,j} \in (\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=1}$, la décomposition de e_i dans la base $1\otimes v_1,\dots,1\otimes v_d$. Comme les e_i sont fixes sous $\mathcal{G}_{F_\infty}$, on a

$$\det(\sigma)\sigma(\det(a_{i,j})) = \det(a_{i,j}) \qquad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F_\infty}.$$

La représentation $\det_F(V)$ est une F-représentation de de Rham de $\mathcal{G}_F$, et elle est de dimension un. En particulier, elle est de Hodge-Tate (cf. [Fo94b] ou [Fo82a]), et le corollaire du théorème 2 de l'appendice de [SKL68] affirme qu'une telle représentation est de la forme

$$\eta\psi \prod_{\tau\in\mathrm{Hom}(F,\overline{\mathbf{Q}_p})} (\tau\circ\chi_{\mathcal{F}})^{k_\tau},$$

avec η un caractère d'ordre fini, ψ un caractère non ramifié sur F, et $k_\tau \in \mathbf{Z}$. Notons N l'ordre de η et β l'image par ψ du morphisme de Frobenius relatif. Soit $\Omega \in \widehat{F^{\mathrm{nr}}} \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}$ tel que $\varphi_F(\Omega) = \beta^{-1}\Omega$. Posons $\Delta = (\Omega\det(a_{i,j}))^N$, alors Δ est un élément de $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. De plus, comme Δ est multiple de $\det(a_{i,j})$ dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}]$, $\Delta q^n u_n$ s'écrit comme combinaison linéaire des e_i, à coefficients dans $(\mathbf{B}^+_{\max,F}[T^{-1}])^{\varphi_F=a,\mathcal{G}_{F_\infty}}$, où $a = \beta^{-N} \in F$ (et même dans $(T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=a,\mathcal{G}_{F_\infty}}$, quitte à augmenter la valeur de k trouvée précédemment).

Notons

$$\Delta q^n u_n = \sum_{i=1}^{d} b_i(n) e_i,$$

avec $b_i(n) \in (T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a, \mathcal{G}_{F_\infty}}$, la décomposition obtenue ci-dessus. On a

$$\Delta(1-\sigma)(q^n u_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{d} (1-\sigma)(T^k b_i(n)) T^{-k} e_i \;+\; \sum_{i=1}^{d} \sigma(T^k b_i(n)) \underbrace{(1-\sigma)(T^{-k} e_i)}_{\underset{\sigma\to 1}{\longrightarrow} 0} \;-\; \underbrace{(1-\sigma)(\Delta)}_{\underset{\sigma\to 1}{\longrightarrow} 0} \sigma(q^n u_n).$$

La fin de la démonstration consiste à appliquer le lemme 4.0.6 aux suites $(b_i(n))_n$. Pour arriver au résultat, on va suivre deux fois le même raisonnement : d'abord en multipliant tout par une suite tendant assez vite vers 0 pour que les suites considérées soient bornées, en en déduisant que la suite $(q^n u_n)$ est elle-même bornée, puis en travaillant directement sur $(q^n u_n)$.

Soit (α_n) une suite bornée d'éléments de $\mathbf{Q}_p$, telle que la suite $(\alpha_n q^n u_n)$ soit bornée. Comme

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\tau \in \mathcal{G}_{F_n}} v_{\max,F}((1-\tau)(q^n u_n)) = +\infty,$$

on déduit de la formule ci-dessus que

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_n}} v_{\max,F}\left((1-\sigma)(\alpha_n T^k b_i(n))\right) = +\infty,$$

pour tout $i \in \{1,\dots,d\}$. D'après le lemme 4.0.6 et comme la suite de terme général $\alpha_n T^k b_i(n)$ est bornée, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \inf_{\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n-1}}} v_{\max,F}\left((1-\sigma)(\alpha_n T^k b_i(n))\right) = +\infty,$$

puis, en utilisant à nouveau l'hypothèse que $(\alpha_n q^n u_n)$ est bornée, on obtient que si (σ_n) est une suite d'éléments de Γ_F vérifiant $\sigma_n \in \Gamma_{F_{n-1}}$ alors la suite de terme général $\alpha_n(1-\sigma_n)(q^n u_n)$ tend vers 0, puis (d'après la partie précédente) que $\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})$ tend vers 0.

Notons $\|\cdot\|$ une norme p-adique sur $((T^{-k}\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=1} \otimes_F V)^{\mathcal{G}_{F_\infty}}$. Considérons d'abord

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \|q^n u_n\| \leqslant 1 \\ p^{\kappa(n)} & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\kappa(n) \in \mathbf{Z}$ est tel que $\frac{1}{p} < p^{-\kappa(n)}\|q^n u_n\| \leqslant 1$. (On a en particulier $\kappa(n) > 0$, dans le second cas). On a alors, par construction

$$\|\alpha_n q^n u_n\| \leqslant 1$$
$$|\alpha_n| \leqslant 1,$$

donc on se trouve dans les hypothèses précédentes. On en déduit que $\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})$ tend vers 0. Or on a

$$\left\|\alpha_n q^{n-1} u_{n-1}\right\| \leqslant \max\left(\left\|\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})\right\|, \|\alpha_n q^n u_n\|\right),$$

avec égalité si les deux normes dans la parenthèse sont différentes. Supposons n assez grand pour que

$$\left\|\alpha_n(q^n u_n - q^{n-1}u_{n-1})\right\| < \frac{1}{p}.$$

On a alors deux cas :

(i) soit $\|q^n u_n\| \leqslant 1$;

(ii) soit $\|q^n u_n\| > 1$, et on a alors $\|\alpha_n q^n u_n\| > \frac{1}{p}$ par construction, et les résultats précédents donnent $\left\|\alpha_n q^{n-1} u_{n-1}\right\| = \|\alpha_n q^n u_n\|$, donc $\|q^{n-1} u_{n-1}\| = \|q^n u_n\|$.

La suite $(q^n u_n)$ est donc bornée.

On peut alors réappliquer les résultats précédents avec $\alpha_n = 1$. On obtient que la suite de terme général $q^n u_n - q^{n-1} u_{n-1}$ tend vers 0, donc que la suite de terme général $q^n u_n$ converge, ce qui conclut la preuve du théorème 5.2.2.

6 Appendice : Éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathrm{B}}^+_{\mathbf{rig},F}$

Les éléments de l'anneau de Fontaine $\widetilde{\mathbf{B}}^+_F$ s'écrivent de manière unique sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n] \qquad \text{avec } x_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+, \text{ nul pour } n \text{ assez petit.}$$

D'autre part, si l'on considère une suite (x_n) dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ telle que $\lim_{n\to-\infty} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) + \frac{n}{e_F} = +\infty$, alors la série $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n]$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, et les éléments ainsi obtenus sont denses pour la topologie p-adique dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. Ceci conduit naturellement à se demander si tous éléments de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ peuvent s'écrire ainsi (question dont je ne connais pas la réponse). Cependant, si une telle écriture existe, elle se comporte de manière beaucoup plus désagréable qu'on ne le voudrait. Par exemple, si $p > 2$ et $F = \mathbf{Q}_p$, on peut regarder la suite des

$$y_N = \left(\sum_{n\in\mathbf{N}} \frac{[\widetilde{p}]^{2n}}{p^n}\right) + \frac{[\widetilde{p}]^{2N}}{p^N} \in \mathbf{B}^+_{\max}.$$

Notons que $\frac{[\widetilde{p}]^{2N}}{p^N}$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini, et que l'on peut écrire

$$y_N = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[x_n^{(N)}]$$

avec $x_n^{(N)} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$. On constate alors après calcul que les suites $(x_n^{(N)})_{N\in\mathbf{N}}$, à n fixé, ne convergent pas dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$, ce qui est un peu désagréable.

À défaut d'obtenir une telle description des éléments de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, on va considérer un ensemble plus petit. (C'est en fait sur des sous-espaces propres de φ_F dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ que l'on se servira des résultats de cette partie). Un premier candidat naturel serait

$$\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \varphi_F^n\left(\mathbf{B}^+_{\max,F}\right).$$

Cependant, cela ne donne pas encore des conditions assez fortes pour la méthode employée ici.

On dira qu'un élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ est d'ordre $r \in \mathbf{R}$ s'il existe un $A \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il soit de la forme

$$x = \varphi_F^n(x_n), \qquad \text{avec } x_n \in \mathbf{B}^+_{\max,F},\ v_{\max,F}(x_n) \geqslant A - \frac{nh}{r}.$$

On va montrer que, si $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est une suite d'éléments de F vérifiant $v_p(\kappa_n) = \frac{n}{e_F}$, alors tout élément d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[x_n]$, avec $\liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0$.

Fixons dorénavant $(\kappa_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une suite d'éléments de F vérifiant $v_p(\kappa_n) = \frac{n}{e_F}$ (par exemple $\kappa_n = \pi_F^n$ convient.

Pour tout $\alpha > 0$, posons

$$X_\alpha = \left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[x_n] \Bigg/ \forall n \in \mathbf{Z} \quad \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}\right\} \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}$$

et

$$X = \bigcup_{\alpha>0} X_\alpha = \left\{\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[x_n] \Bigg/ \liminf_{n\to-\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0\right\} \subset \mathbf{B}^+_{\max,F}.$$

Notons que la condition

$$\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \qquad (\forall n \in \mathbf{Z})$$

équivaut à

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \qquad \text{pour tout } n \leqslant \frac{e_F}{\log p}\log(\alpha \log p).$$

L'objectif de cet appendice est de montrer que X coïncide avec l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ (et en particulier X ne dépend pas du choix de la suite (κ_n)). Pour cela, on va d'abord montrer que l'ensemble X est stable par addition, puis donner quelques résultats de nature topologique sur X. Ceux-ci servent ensuite pour montrer que X est l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$. Une fois ce résultat connu, le reste de cette partie sera consacré à montrer que X est en fait homéomorphe à une partie de $(\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{Z}}$ muni de la bonne topologie, puis à appliquer ces résultats aux sous-espaces propres de φ_F dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

6.1 Généralités sur les vecteurs de Witt

Cette partie a essentiellement pour but de fixer des notations permettant de décrire l'addition de vecteurs de Witt.

Lemme 6.1.1. *Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une famille finie $(a_{n,i})_{i\in I_n}$ d'éléments de $\mathcal{O}_F$, qui vérifient $v_p(a_{n,i}) = \frac{n}{e_F}$, et soit $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{O}_F$ qui vérifient $v_p(b_n) = \frac{n}{e_F}$. Alors, pour $x_{n,i} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ (avec $n \in \mathbf{N}$ et $i \in I_n$), on a*

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{i\in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] = \sum_{n\in\mathbf{N}} b_n[y_n],$$

dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_F$, où y_n est donné par un polynôme à coefficients dans k_F en les $x_{n,i}$, $x_{n-1,i}$, …, $x_{n-e_F,i}^{1/p}$, …, $x_{0,i}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F}\right\rfloor}}$, et les y_n sont homogènes de degré total 1 en les $x_{n,i}$, …, $x_{0,i}$.

Notons que comme $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est infini, ces polynômes sont uniquement déterminés.

Preuve : Il suffit de montrer par récurrence que cette somme s'écrit, pour tout $N \in \mathbf{N}$, sous la forme

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_n[y_n] \;+\; \sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{j\in J_{N,n}} b_{N,n,j}[z_{N,n,j}],$$

avec $J_{N,n}$ des ensembles finis d'indices, $b_{N,n,j}$ de valuation $\frac{n}{e_F}$, et avec y_n et $z_{N,n,j}$ donnés par des polynômes en $x_{n,i}$, …, $x_{0,i}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F}\right\rfloor}}$, homogènes de degré 1 en $x_{n,i}$, …, $x_{0,i}$.

Pour $N = 0$, la propriété est immédiate. De plus, le passage de N à $N+1$ peut se faire en appliquant le cas $N = 1$ à

$$\sum_{n=N}^{+\infty}\sum_{j\in J_{N,n}} \frac{b_{N,n,j}}{b_N}[z_{N,n,j}].$$

En effet, une expression homogène de degré 1 en $z_{N,n,j}$, …, $z_{N,N,j}$, est homogène de degré 1 en $x_{n,i}$, …, $x_{0,i}$, et un polynôme en les $z_{N,n,j}$, …, $z_{N,N,j}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-N}{e_F}\right\rfloor}}$ est un polynôme en $x_{n,i}$, …, $x_{0,i}^{p^{-\left\lfloor \frac{n}{e_F}\right\rfloor}}$ (car $\left\lfloor \frac{u}{e_F}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{v}{e_F}\right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{u+v}{e_F}\right\rfloor$).

On est donc ramené au cas $N = 1$. Écrivons maintenant

$$a_{0,i} = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_F^k [c_{i,k}] \qquad \text{avec } c_{i,k} \in k_F.$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] &= \sum_{i \in I_0} a_{0,i}[x_{0,i}] \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] \\
&= \sum_{i \in I_0} \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_F^k [c_{i,k} x_{0,i}] \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] \\
&= \sum_{i \in I_0} [c_{i,0} x_{0,i}] \;+\; \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_0} \pi_F^k [c_{i,k} x_{0,i}] \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}].
\end{aligned}$$

Enfin, d'après les formules d'addition dans les anneaux de Witt, on a

$$\sum_{i \in I_0} [c_{i,0} x_{0,i}] \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} p^n [d_n],$$

avec d_n un polynôme en les $x_{i,0}^{p^{-n}}$, homogène de degré 1 en les $x_{0,i}$. De plus, on a $d_0 = \sum_{i \in I} c_{i,0} x_{0,i}$. On trouve donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] = [d_0] + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n [d_n] + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_0} \pi_F^k [c_{i,k} x_{0,i}] + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}],$$

ce qui permet de conclure la récurrence, et le lemme s'en déduit. ■

On peut raffiner le lemme précédent comme ci-dessous.

Corollaire 6.1.2. *Soit, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, une famille finie $(a_{n,i})_{i \in I_n}$ d'éléments de F vérifiant $v_p(a_{n,i}) = \frac{n}{e_F}$, et soit $(b_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ une suite d'éléments de F vérifiant $v_p(b_n) = \frac{n}{e_F}$. Alors, pour $x_{n,i} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ ($n \in \mathbf{Z}$, $i \in I_n$), tels que $x_{n,i} = 0$ pour n assez petit, on a*

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \sum_{i \in I_n} a_{n,i}[x_{n,i}] = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n [y_n],$$

dans $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$, où y_n est donné par un polynôme à coefficients dans k_F en les $x_{n,i}$, $x_{n-1,i}$, …, $x_{n-e_F,i}^{1/p}$, …, et les y_n sont homogènes de degré total 1 en les $x_{n,i}$, …. De plus, ces polynômes sont uniquement déterminés par les $a_{n,i}$ et b_n.

Preuve : Cela découle immédiatement du lemme précédent. ■

6.2 Stabilité par combinaison F-linéaire

Montrons que X_α est stable par combinaison $\mathcal{O}_F$-linéaire. Pour cela, commençons par le lemme élémentaire suivant.

Lemme 6.2.1. *Soient $c_0, \dots, c_{n-1}$ des entiers naturels, avec $c_0 > 0$, et supposons de plus*
$$c_0 + pc_1 + \dots p^{n-1}c_{n-1} = kp^n,$$
avec $k \in \mathbf{N}^*$, alors on a
$$c_0 + c_1 + \dots + c_{n-1} \geqslant n(p-1) + p(k-1) + 1.$$

Preuve : On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on considère un entier naturel $c_0 > 0$, vérifiant $c_0 = kp$, et on a alors bien
$$c_0 \geqslant (p-1) + p(k-1) + 1 = kp.$$

Supposons maintenant le résultat vrai pour un n donné, et considérons un des entiers naturels $c_0, \dots, c_n$, avec $c_0 > 0$, vérifiant
$$c_0 + pc_1 + \dots p^n c_n = kp^{n+1}.$$
Comme $c_0 > 0$, on a nécessairement $c_n < kp$, donc
$$c_0 + pc_1 + \dots p^{n-1}c_{n-1} = (kp - c_n)p^n$$
avec $kp - c_n \in \mathbf{N}^*$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit
$$c_0 + c_1 + \dots + c_{n-1} \geqslant n(p-1) + p(kp - c_n - 1) + 1,$$
donc
$$c_0 + c_1 + \dots + c_n \geqslant n(p-1) + p(kp-1) + 1 - c_n(p-1).$$
Comme $c_n \leqslant kp - 1$, on trouve
$$c_0 + c_1 + \dots + c_n \geqslant p(p-1) + (kp-1) + 1 = (n+1)(p-1) + p(k-1) + 1,$$
d'où le lemme. ■

Lemme 6.2.2. *Soit $\alpha > 0$, et soit I un ensemble fini. Soit*
$$x_i = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_{i,n}[x_{i,n}] \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$$
avec $\kappa_{i,n} \in F$ et $x_{i,n} \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant
$$v_p(\kappa_{i,n}) = \frac{n}{e_F} \quad \text{et} \quad \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{i,n}), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}.$$
Posons
$$\sum_{n \geqslant m} \kappa_n[z_n^{(m)}] \ = \ \sum_{i \in I} \sum_{n \geqslant m} \kappa_{i,n}[x_{i,n}]$$
à l'aide du corollaire 6.1.2.

Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite $(z_n^{(m)})_m$ converge quand m tend vers $-\infty$ (et cette convergence est même uniforme en le choix des x_i). On notera z_n sa limite.

De plus, pour $m \leqslant m_0 = \min\left(n-1, \left\lfloor \frac{e_F}{\log p} \log(\alpha \log p)\right\rfloor\right)$, on a
$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n - z_n^{(m-1)}) \geqslant \frac{\alpha}{p^{n/e_F}} \left(1 + (p-1)\left\lfloor \frac{m_0 + 1 - m}{e_F} \right\rfloor\right),$$
et si $n \leqslant \frac{e_F}{\log p} \log(\alpha \log p)$, on a
$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n^{(m)}) \geqslant \alpha p^{-n/e_F} \quad \text{et} \quad v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}.$$

Preuve : Fixons $n \in \mathbf{Z}$, et considérons un monôme faisant intervenir au moins un des $x_{i,m}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}}$ (avec $m < n$), éventuellement des $x_{j,n}, \ldots, x_{j',m+1}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-m-1}{e_F} \right\rfloor}}$, mais pas d'autres facteurs. Autrement dit, on regarde les monômes susceptibles d'apparaître dans l'expression de $z_n^{(m)} - z_n^{(m+1)}$, d'après le corollaire 6.1.2.

Notons $a_{i,k} \in \mathbf{N}$ l'exposant de $x_{i,k}^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k-1}{e_F} \right\rfloor}}$ dans ce monôme. En particulier $a_{i,m} > 0$ pour au moins une valeur de i.

On a en fait $a_{i,m} > 0$ pour au moins deux valeurs de i, pour les monômes qui interviennent ici. En effet, si les $x_{i,m'}$ pour $m' < m$ et tous les $x_{i,m}$ sauf éventuellement un sont nuls, alors $z_n^{(m)}$ est indépendant de la valeur de ce $x_{i,m}$, et est égal à $z_n^{(m+1)}$.

D'autre part, d'après le corollaire 6.1.2 (homogénéité de degré 1), on a

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{i,k}}{p^{\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}} = 1,$$

donc $\sum_{i \in I} a_{i,m}$ est multiple de p, et l'on a $a_{i,n} = \cdots = a_{i,n-e_F+1} = 0$ et $\sum_{i \in I} a_{i,m} \geqslant p$. On peut alors appliquer le lemme 6.2.1 aux entiers $a_{i,m}, \ldots, a_{i,m_0}$ pour $m \leqslant m_0 < n$ (en les regroupant selon la puissance de p en facteur). En effet,

$$\left(\sum_{i \in I} a_{i,m}\right) + \cdots + \left(\sum_{i \in I} a_{i,m_0}\right) p^{\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor}$$

est un multiple strictement positif de $p^{\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m_0-1}{e_F} \right\rfloor}$ donc

$$\sum_{i \in I} \sum_{k=m}^{m_0} a_{i,k} \geqslant \left(\left\lfloor \frac{n-m}{e_F} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m_0-1}{e_F} \right\rfloor \right) (p-1) + 1 \geqslant 1 + (p-1) \left\lfloor \frac{m_0+1-m}{e_F} \right\rfloor$$

Prenons maintenant

$$m_0 = \min \left(n-1, \left\lfloor \frac{e_F}{\log p} \log(\alpha \log p) \right\rfloor \right)$$

comme dans l'énoncé. On a alors

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{i,m}) \geqslant \alpha p^{-m/e_F}$$

pour tout $m \leqslant m_0$ et tout $i \in I$. Comme

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}} \left(c \prod_{\substack{i \in I \\ m \leqslant k \leqslant n}} x_{i,k}^{a_{i,k} p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}} \right) = \sum_{\substack{i \in I \\ m \leqslant k \leqslant n}} a_{i,k} p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_k),$$

on a alors

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}\left(c\prod_{\substack{i\in I\\ m\leqslant k\leqslant n}} x_{i,k}^{a_{i,k}p^{-\left\lfloor\frac{n-k}{e_F}\right\rfloor}}\right) \geqslant \sum_{\substack{i\in I\\ m\leqslant k\leqslant n}} a_{i,k}p^{-\left\lfloor\frac{n-k}{e_F}\right\rfloor} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_{i,k})$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{p^{n/e_F}}\left(\sum_{\substack{i\in I\\ m_0\leqslant k\leqslant n}} a_{i,k}\right)$$
$$\geqslant \frac{\alpha}{p^{n/e_F}}\left(1+(p-1)\left\lfloor\frac{m_0+1-m}{e_F}\right\rfloor\right).$$

Quand m tend vers $-\infty$, cette valuation tend vers l'infini, d'où la convergence.

Enfin, le corollaire 6.1.2 (homogénéité de degré 1) et la définition de X_α donnent la minoration

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n^{(m)}) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$$

pour $n \leqslant \frac{e_F}{\log p}\log(\alpha\log p)$, ce qui conclut la preuve du lemme. ■

Pour montrer la stabilité par addition de X, on va maintenant prouver le lemme suivant, qui permet de passer de la convergence des « composantes » $z_n^{(m)}$ à une convergence dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$.

Lemme 6.2.3. *Soit $(x^{(m)})$ une suite d'éléments de X_α, avec*

$$x^{(m)} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[a_n^{(m)}],$$

et $\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)}), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant \alpha p^{-n/e_F}$ *pour tout $n\in\mathbf{Z}$ et tout m. Supposons que pour tout $n\in\mathbf{Z}$, la suite $(a_n^{(m)})_m$ converge dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ vers a_n. Alors la suite $(x^{(m)})$ converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ vers*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[a_n] \ \in X_\alpha.$$

Preuve : Soit $A>0$. Comme les $x^{(m)}$ sont dans X_α, on a

$$\lim_{n\to-\infty}\left(\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)})\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)})\right) = +\infty,$$

uniformément en m. En particulier, on peut trouver des entiers $M<N$ tels que $\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n^{(m)}) \geqslant A$ pour tout m et pour tout entier n en-dehors de l'intervalle $[M,N]$.

On a alors aussi $\frac{n}{e_F}+v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(a_n) \geqslant A$ pour n en-dehors de $[M,N]$.

D'autre part, $\sum_{n=M}^N \kappa_n[a_n^{(m)}]$ tend vers $\sum_{n=M}^N \kappa_n[a_n]$, donc pour m assez grand on a

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n=M}^{N}\kappa_n[a_n] \ - \ \sum_{n=M}^{N}\kappa_n[a_n^{(m)}]\right) \geqslant A.$$

On en déduit alors, pour m assez grand,

$$v_{\max,F}\left(\sum_{n\in\mathbf{Z}}\kappa_n[a_n] \ - \ \sum_{n\in\mathbf{Z}}\kappa_n[a_n^{(m)}]\right) \geqslant A,$$

c'est-à-dire $v_{\max,F}(x-x^{(m)}) \geqslant A$. ■

Corollaire 6.2.4. *Soient I un ensemble fini et*

$$x_i = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_{i,n}[x_{i,n}] \qquad (i\in I)$$

comme précédemment. Alors $\sum_{i\in I} x_i$ est un élément de X_α, et on a

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[z_n].$$

où z_n est défini comme dans le lemme 6.2.2.

Preuve : Cela découle de l'application du lemme 6.2.3 à la situation décrite dans le lemme 6.2.2. ■

On a alors immédiatement les corollaires suivants.

Corollaire 6.2.5. *L'ensemble X_α ne dépend pas du choix de la suite (κ_n).*

Corollaire 6.2.6. *Toute combinaison $\mathcal{O}_F$-linéaire d'éléments de X_α est dans X_α, et toute combinaison F-linéaire d'éléments de X est dans X.*

6.3 La topologie naturelle de X

On munit X d'une distance ultramétrique $(x,y)\mapsto e^{-w_X(x-y)}$ en posant

$$w_X(z) = \sup\{\alpha > 0 \ / \ z\in X_\alpha\}.$$

Nous allons relier cette distance à la définition des éléments d'ordre 1.

Notons tout d'abord que l'on a $X_\alpha \subset \varphi_F(X_{\alpha/q}) \subset X_{\alpha/q}$, donc $\varphi_F(X) = X$. En particulier, X est contenu dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$.

Le lemme suivant montre (avec des constantes explicites) que X est inclus dans l'ensemble des éléments d'ordre 1, et que si l'on muni X de sa topologie naturelle et l'ensemble des éléments d'ordre 1 de la topologie p-adique, alors cette inclusion est un homéomorphisme sur son image.

Lemme 6.3.1. *Si $x\in X$, alors on a*

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant \inf_{m\in\mathbf{N}} \big(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\big) \ - \ \frac{\log w_X(x)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

Preuve : En effet, on a, pour tout $m\in\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x)) &= \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + \frac{v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}{q^m}\right) \\
&\geqslant \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(\frac{n}{e_F} + q^{-m}\begin{cases} p^{-n/e_F} w_X(x) & \text{si } p^{-n/e_F} w_X(x) \geqslant \frac{1}{\log p} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\right) \\
&\geqslant \min\left(\inf_{t\leqslant \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}} \big(t + p^{-t-mh} w_X(x)\big), \inf_{t\geqslant \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}} t\right).
\end{aligned}$$

La fonction $t \mapsto t + p^{-t-mh} w_X(x)$ atteint son minimum pour $t = \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} - mh$, si bien qu'on trouve

$$\begin{aligned} v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x)) &\geqslant \min\left(\frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} - mh + \frac{1}{\log p}, \frac{\log(v_X(x)\log p)}{\log p}\right) \\ &\geqslant \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} + \min\left(\frac{1}{\log p} - mh, 0\right), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \inf_{m\in\mathbf{N}} \left(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\right) &\geqslant \inf_{m\in\mathbf{N}} \left(\frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p} + \min\left(\frac{1}{\log p}, mh\right)\right) \\ &\geqslant \frac{\log(w_X(x)\log p)}{\log p}, \end{aligned}$$

d'où la minoration donnée par le lemme.

Montrons maintenant la majoration. Posons

$$A = \inf_{m\in\mathbf{N}} \left(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x))\right).$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\forall m \in \mathbf{N} \qquad \frac{n}{e_F} + \frac{v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}{q^m} \geqslant A - mh,$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \sup_{m\in\mathbf{N}} p^{mh}\left(A - mh - \frac{n}{e_F}\right).$$

La fonction $t \mapsto p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right)$ est strictement croissante de $-\infty$ à $A - \frac{n}{e_F} - \frac{1}{\log p}$, puis strictement décroissante jusqu'à $+\infty$. Pour minorer

$$\sup_{t\in h\mathbf{N}} p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right),$$

commençons par résoudre l'équation

$$p^{t-h}\left(A - \frac{n}{e_F} - t + h\right) = p^t\left(A - \frac{n}{e_F} - t\right).$$

On trouve $t = A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1}$. On a alors

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) \geqslant \begin{cases} \frac{h}{q-1} p^{A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1}} & \text{si } 0 \leqslant A - \frac{n}{e_F} - \frac{h}{q-1} \\ A - \frac{n}{e_F} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} w_X(x) &= \inf_{n\in\mathbf{Z}} \left(p^{n/e_F} \max\left(\frac{1}{\log p}, v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)\right)\right) \\ &\geqslant \min\left(\inf_{t\leqslant A-\frac{h}{q-1}} \max\left(\frac{p^t}{\log p}, \frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}}\right), \inf_{t\geqslant A-\frac{h}{q-1}} p^t \max\left(\frac{1}{\log p}, A - t\right)\right). \end{aligned}$$

Remarquons que $\frac{h}{q-1} \leqslant \frac{1}{\log p}$. En effet, la fonction $u \mapsto \frac{u}{p^u-1}$ est décroissante pour $u \geqslant 0$. On trouve alors

$$w_X(x) \geqslant \min\left(\frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}}, \frac{1}{\log p}p^{A-\frac{h}{q-1}}\right) = \frac{h}{q-1}p^{A-\frac{h}{q-1}},$$

puis

$$A - \frac{\log w_X(x)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1) - \log h}{\log p},$$

d'où le lemme. ■

Corollaire 6.3.2. *L'ensemble des éléments d'ordre* 1 *de* $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ *contient* X*. De plus, les intersections*

$$X \cap \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F} \geqslant A - mh}\right),$$

pour $A \in \mathbf{R}$*, forment une base de voisinages de* 0 *dans* X*.*

Preuve : Ceci découle immédiatement du lemme 6.3.1. ■

Jusqu'à présent, il n'a jamais été nécessaire de supposer que l'écriture des éléments de X sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[x_n]$ est unique. Le lemme suivant permet d'une part de montrer cette unicité, et d'autre part de traduire la topologie naturelle de X directement en termes des composantes x_n.

Lemme 6.3.3. *Soient* x *et* y *deux éléments de* X*, avec*

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[x_n] \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[y_n]$$

comme précédemment. On a :

$$w_X(x-y) = \inf_{n \in \mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Preuve : Posons

$$z = x - y = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[z_n] \quad \text{et} \quad x' = y + z = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[x'_n]$$

avec z_n (respectivement x'_n) donné en fonction des x_n et y_n (respectivement y_n et z_n) par le lemme 6.2.2, et montrons d'abord que l'on a $x_n = x'_n$. Notons que même si $x = y + z$, ce résultat n'est pas complètement évident puisque l'unicité de l'écriture de x n'a pas encore été démontrée.

Définissons $z_n^{(m)}$ comme dans le lemme 6.2.2 pour $n \geqslant m$, et $z_n^{(m)} = 0$ sinon, de sorte que

$$\sum_{n \geqslant m} \kappa_n[x_n] - \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[y_n] = \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[z_n^{(m)}]$$

et $\lim_{m \to -\infty} z_n^{(m)} = z_n$.

Par addition dans $\widetilde{\mathbf{B}}^+_F$ (où l'on sait que l'on a unicité des écritures sous cette forme), a

$$\sum_{n \geqslant m} \kappa_n[x_n] = \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[y_n] + \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[z_n^{(m)}],$$

et les x_n sont donnés par les polynômes du corollaire 6.1.2.

Par passage à la limite $m \to -\infty$, comme dans le lemme 6.2.2, on obtient $x_n = x'_n$, comme voulu.

De plus, comme les x_n sont donnés par les polynômes du corollaire 6.1.2, ils sont dans l'idéal engendré par les $(z_k^{(m)})^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$ avec $k \leqslant n$. En effet, dans la somme

$$\sum_{n \geqslant m} \kappa_n[x_n] = \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[y_n] + \sum_{n \geqslant m} \kappa_n[z_n^{(m)}],$$

si tous les $z_k^{(m)}$ sont nul, $x_n - y_n$ s'annule aussi, donc tous les monômes intervenant dans $x_n - y_n$ contiennent un facteur $(z_k^{(m)})^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$.

Par le lemme argument de convergence uniforme que dans le lemme 6.2.2, on peut alors passer à la limite $m \to -\infty$, et en déduire que $x_n - y_n$ est dans l'adhérence de l'idéal engendré par les $z_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$.

Pour tout $k \leqslant n \leqslant \frac{\log(w_X(x-y)\log p)}{\log p}$, on a :

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_k^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}) \geqslant p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor} p^{-\frac{k}{e_F}} w_X(x-y) \geqslant p^{-n/e_F} w_X(x-y).$$

On a alors $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n) \geqslant p^{-n/e_F} w_X(x-y)$ pour tout $n \leqslant \frac{\log(w_X(x-y)\log p)}{\log p}$, donc

$$\inf_{n \in \mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right) \geqslant w_X(x-y).$$

Posons

$$\alpha = \inf_{n \in \mathbf{Z}} p^{n/e_F} \max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n - y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Comme $z_n^{(m)}$ s'annule si $x_k = y_k$ pour $k \leqslant n$, de la même manière que ci-dessus, z_n est dans l'adhérence de l'idéal engendré par les $(x_k - y_k)^{p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor}}$, avec $k \leqslant n$. On trouve donc, pour tout $n \leqslant \frac{e_F}{\log p} \log(w_X(x-y)\log p)$:

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(z_n) \geqslant \inf_{k \leqslant n} p^{-\left\lfloor \frac{n-k}{e_F} \right\rfloor} p^{-k/e_F} \alpha \geqslant p^{-n/e_F} \alpha,$$

donc

$$w_X(x-y) \geqslant \alpha,$$

d'où le lemme. ■

Corollaire 6.3.4. *Soit x un élément de X, il s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n[x_n]$$

avec $x_n \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\liminf_{n \to -\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 6.3.3 et de la définition de la valuation $v_{\max,F}$. ■

Corollaire 6.3.5. *L'espace X, muni de sa métrique naturelle, est homéomorphe à*

$$\left\{ (x_n) \in (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathbf{Z}} \;\middle/\; \liminf_{n \to -\infty} p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n) > 0 \right\}$$

muni de la norme

$$\|(x_n)\|_X = \sup_{n \in \mathbf{Z}} \min\left(e^{-1}, p^{-p^{n/e_F} v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n)}\right).$$

De plus cet homéomorphisme et sa réciproque sont uniformément continus.

Preuve : C'est une conséquence immédiate du lemme 6.3.3. ■

Pour montrer que X est l'ensemble des éléments d'ordre 1, on va être amené à utiliser des convergences pour la topologie induite par $v_{\max,F}$, qui est plus faible que la topologie naturelle de X.

Lemme 6.3.6. *Soit $(x^{(m)})$ une suite d'éléments de X_α qui converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$, avec*

$$x^{(m)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n [x_n^{(m)}]$$

et $x_n^{(m)}$ comme précédemment. Alors, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, la suite $(x_n^{(m)})_m$ converge dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$.

Preuve : Posons $y^{(m)} = x^{(m+1)} - x^{(m)} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n [y_n^{(m)}]$, avec $y_n^{(m)}$ comme précédemment. Comme $\lim_{m \to +\infty} y^{(m)} = 0$, en considérant $v_{\max,F}(y^{(m)})$, on trouve $\lim_{m \to +\infty} y_n^{(m)} = 0$.

Or, on a

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n [x_n^{(m+1)}] = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n [x_n^{(m)}] + \sum_{n \in \mathbf{Z}} \kappa_n [y_n^{(m)}].$$

D'après le corollaire 6.3.4, $x_n^{(m+1)}$ s'obtient par le passage à la limite décrit dans le lemme 6.2.2. D'après le corollaire 6.1.2 et la convergence uniforme décrite dans le lemme 6.2.2, on trouve que $x_n^{(m+1)} - x_n^{(m)}$ tend vers 0 quand m tend vers l'infini, d'où le lemme. ■

Corollaire 6.3.7. *Les espaces X_α sont complets pour la valuation $v_{\max,F}$.*

Preuve : Cela résulte du lemme 6.3.6 et du lemme 6.2.3. ■

6.4 X est l'ensemble des éléments d'ordre 1

En utilisant la stabilité par addition (corollaire 6.2.4) et le fait que les X_α sont complets pour $v_{\max,F}$ (corollaire 6.3.7), on va maintenant montrer que X est dense dans l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$ pour la topologie donnée par $v_{\max,F}$, et donc (puisqu'on a montré que X est complet pour cette métrique) que ces deux ensembles sont égaux.

Lemme 6.4.1. *Il existe une section $\mathcal{O}_F$-linéaire continue du morphisme surjectif $\theta : \widetilde{\mathbf{A}}^+_F \to \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$.*

Preuve : Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ dont les classes modulo π_F forment une base de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/\pi_F \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ sur k_F (le corps résiduel de $\mathcal{O}_F$). Choisissons aussi des $\widetilde{e_i} \in \widetilde{\mathbf{E}}$ tels que $\widetilde{e_i}^{(0)} = e_i$.

Tout élément x de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ s'écrit alors sous la forme $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, avec $x_i \in \mathcal{O}_F$, tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies de I. On pose

$$s(x) = \sum_{i \in I} x_i [\widetilde{e_i}] \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+.$$

L'application s est alors linéaire et continue (par construction), et l'on a $\theta(s(x)) = x$. ■

Par linéarité, ce résultat s'étend à $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$. Fixons donc une section F-linéaire continue s de $\theta : \widetilde{\mathbf{B}}_F^+ \to \mathbf{C}_p$, telle que $s(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$.

Lemme 6.4.2. *Soit $\omega \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ un générateur de $\ker \theta$. Tout élément $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{\omega}{\pi_F} \right)^n,$$

avec $a_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$. De plus, si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors on a $v_p(a_n) \geqslant \frac{n}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve : Posons $x_0 = x$. Si $x_n \in \mathbf{A}_{\max,F}$, $n \in \mathbf{N}$ a été défini, on pose $a_n = \theta(x_n) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$. Alors $x_n - s(a_n) \in \mathbf{A}_{\max,F}$ est dans le noyau de θ, donc dans $\frac{\omega}{\pi_F} \mathbf{A}_{\max,F}$, et l'on définit alors $x_{n+1} = \frac{\pi_F}{\omega}(x_n - s(a_n))$.

On obtient ainsi deux applications $\mathcal{O}_F$-linéaires continues de $\mathbf{A}_{\max,F}$ dans $(\mathbf{A}_{\max,F})^{\mathbf{N}}$ et $(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p})^{\mathbf{N}}$ respectivement, qui à x font correspondre respectivement la suite (x_n) et la suite (a_n).

On va maintenant montrer que la suite (x_n) tend vers 0 pour la topologie p-adique. Comme $a_n = \theta(x_n)$, cela a pour conséquence que la suite (a_n) tend aussi vers 0, et comme, pour tout $N \geqslant 0$:

$$x = \sum_{n=0}^{N-1} s(a_n) \left(\frac{\omega}{\pi_F} \right)^n + x_N \left(\frac{\omega}{\pi_F} \right)^N,$$

on en déduit aussi, par passage à la limite, la relation

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{\omega}{\pi_F} \right)^n.$$

Considérons d'abord le cas où x est dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, x_n est dans $\pi_F^n \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$ et a_n est dans $\pi_F^n \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, donc en particulier les suites (x_n) et (a_n) tendent vers 0, et l'on a au passage montré la dernière affirmation du lemme.

Notons maintenant que les suites associées à $\frac{\omega}{\pi_F} x$ sont $\frac{\omega}{\pi_F} x, x_0, x_1, x_2, \ldots$ et $0, a_0, a_1, a_2, \ldots$. Par linéarité, on en déduit que les deux suites associées à un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{\omega}{\pi_F} \right]$ tendent vers 0 pour la topologie π_F-adique.

Enfin, $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \left[\frac{\omega}{\pi_F} \right]$ étant dense pour la topologie p-adique dans $\mathbf{A}_{\max,F}$ (par définition de $\mathbf{A}_{\max,F}$), on en déduit par continuité que les suites (x_n) et (a_n) associées à tout élément x de $\mathbf{A}_{\max,F}$ tendent vers 0.

Tout élément de $\mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit donc sous la forme annoncée. Enfin, si l'on applique la construction ci-dessus à

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\frac{\omega}{\pi_F} \right)^n \in \mathbf{A}_{\max,F},$$

avec $b_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ et (b_n) tendant vers 0, on trouve

$$x_n = \sum_{k=n}^{+\infty} s(b_k) \left(\frac{\omega}{\pi_F}\right)^{k-n} \quad \text{et} \quad a_n = b_n,$$

d'où l'unicité. ■

Corollaire 6.4.3. *Tout élément $x \in \mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n,$$

avec $b_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. De plus, si x est dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors on a $v_p(b_n) \geqslant \frac{n}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Preuve : On peut appliquer le lemme précédent avec $\omega = [\widetilde{\pi_F}] - \pi_F$, ce qui permet d'écrire x sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1\right)^n,$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui tend vers 0. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} s(a_n)\right) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^k, \end{aligned}$$

donc x s'écrit sous la forme annoncée, avec

$$b_k = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_n.$$

(Comme la suite (a_n) tend vers 0, ces sommes convergent, et la suite (b_n) tend vers 0).

Montrons maintenant l'unicité. Par linéarité, il suffit de montrer que si

$$0 = \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

alors les b_n sont tous nuls. Commençons par refaire à l'envers la transformation précédente. On a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n) \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1\right)^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} s(b_n)\right) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F} - 1\right)^k, \end{aligned}$$

donc, d'après le lemme précédent,

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} b_n = 0 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Supposons maintenant que les b_n ne sont pas tous nuls. Comme la suite (b_n) tend vers 0, il existe un $N \in \mathbf{N}$ tel que $v_p(b_N) = \inf_{n\in\mathbf{N}} v_p(b_n)$ et ,pour tout $n > N$, $v_p(b_n) > v_p(b_N)$. Or on a

$$b_N = -\sum_{n=N+1}^{+\infty} \binom{n}{N} b_n,$$

donc $v_p(b_N) > v_p(b_N)$, d'où la contradiction recherchée.

La dernière affirmation découle directement de la propriété analogue dans le lemme précédent, et de l'expression de b_n obtenue ci-dessus. ■

Tout élément x de $\mathbf{A}_{\max,F}$ s'écrit donc de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ qui tend vers 0. Étendons d'abord ceci en une description de $\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right)$, pour $A \in \mathbf{R}$.

Lemme 6.4.4. *Soient $A \in \frac{1}{e_F}\mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{N}$, et soit x un élément de*

$$\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right) \subset (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}$$

Alors x s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :
- *$v_p(a_n) \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;*
- *$\lim_{n\to+\infty} v_p(a_n) = +\infty$;*
- *$v_p(a_n) \geqslant A + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.*

Preuve : D'après le corollaire 6.4.3 (appliqué à $\pi_F^{Ae_F}x$), $x \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$ va s'écrire de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ tendant vers 0. Il s'agit de montrer que cette suite (a_n) vérifie les propriétés annoncées, les deux premières découlant directement du corollaire 6.4.3.

On a supposé de plus que x est dans $\varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A}\right)$. Il existe donc un $y \in \mathbf{B}^+_{\max,F}$, avec $v_{\max,F}(y) \geqslant A$, tel que $x = \varphi_F^m(y)$. Ce qui précède s'applique tout aussi bien à y, et on peut donc écrire (de manière unique)

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} s(c_n) \left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (c_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :
- $v_p(c_n) \geqslant A$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $\lim_{n\to+\infty} v_p(c_n) = +\infty$.

On a alors

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_F^m(s(c_n))\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]^{q^m}}{\pi_F}\right)^n.$$

On va maintenant chercher à relier ces deux formes.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi_F^m(s(c_n))$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}_F^+$ vérifiant $v_{\max,F}(\varphi_F^m(s(c_n))) \geqslant A$. D'après le corollaire 6.4.3, on va pouvoir l'écrire de manière unique sous la forme

$$\varphi_F^m(s(c_n)) = \sum_{k=0}^{+\infty} s(d_{n,k})[\widetilde{\pi_F}]^k,$$

avec $d_{n,k} \in \mathbf{C}_p$, $v_p(d_{n,k}) \geqslant A$, $\lim_{k\to+\infty} d_{n,k} = 0$. On a alors

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_F^m(s(c_n))\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]^{q^m}}{\pi_F}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s(d_{n,k})}{\pi_F^n}[\widetilde{\pi_F}]^{k+nq^m} \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{k,n\in\mathbf{N} \\ k+nq^m=j}} \frac{s(d_{n,k})}{\pi_F^n}\right)[\widetilde{\pi_F}]^j, \end{aligned}$$

donc, pour tout $j \in \mathbf{N}$:

$$\frac{a_j}{\pi_F^j} = \sum_{\substack{k,n\in\mathbf{N} \\ k+nq^m=j}} \frac{d_{n,k}}{\pi_F^n},$$

donc

$$v_p(a_j) \geqslant A + \frac{j}{e_F} - \frac{j}{q^m e_F}.$$

■

Corollaire 6.4.5. *Avec les notations du lemme précédent, on a, pour tout $n \in \mathbf{N}$:*

$$s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n \in X \cap \varphi_F^m\left((\mathbf{B}_{\max,F}^+)^{v_{\max,F}\geqslant A-\frac{1}{e_F}}\right).$$

Preuve : En effet, on a $v_p(a_n) \geqslant A$ et $s(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, donc $\frac{s(a_n)}{\pi_F^n}$ est dans $\pi_F^{Ae_F-n}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, donc

$$s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n \in \pi_F^{Ae_F-n}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ \subset X.$$

De plus, l'inégalité $v_p(a_n) \geqslant A + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ montre de même que

$$\frac{s(a_n)}{\pi_F^n} \in \pi_F^{Ae_F-\lceil q^{-m}n\rceil}\widetilde{\mathbf{A}}_F^+,$$

donc

$$v_{\max,F}\left(\varphi_F^{-m}\left(s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n\right)\right) \geqslant \frac{Ae_F - \lceil q^{-m}n\rceil}{e_F} + \frac{n}{q^m e_F}$$
$$\geqslant A - \frac{1}{e_F},$$

d'où le corollaire. ■

Lemme 6.4.6. *Pour tout $A \in \mathbf{R}$, on a*

$$\bigcap_{m\in\mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A-mh}\right) \subset X.$$

Preuve : Soit $A \in \mathbf{R}$, et soit

$$x \in \bigcap_{m\in\mathbf{N}} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant A-mh}\right).$$

D'après le lemme 6.4.4, on peut écrire

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)\left(\frac{[\widetilde{\pi_F}]}{\pi_F}\right)^n$$

avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{C}_p$ vérifiant :

- $v_p(a_n) \geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor}{e_F}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $\lim_{n\to+\infty} v_p(a_n) = +\infty$;
- $v_p(a_n) \geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor}{e_F} - mh + \frac{n}{e_F} - \frac{n}{q^m e_F}$ pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $n \in \mathbf{N}$.

En particulier, cette série converge dans $\mathbf{B}^+_{\max,F}$. Or, d'après le corollaire 6.4.5, ses termes sont dans

$$X \cap \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant \frac{\lfloor Ae_F\rfloor - 1}{e_F}}\right).$$

D'après le lemme 6.3.1, ils sont donc dans X_α pour

$$\alpha = \frac{h}{q-1} p^{\frac{\lfloor Ae_F\rfloor - 1}{e_F} - \frac{h}{q-1}}.$$

D'après le corollaire 6.2.4, les sommes partielles de cette série sont aussi dans X_α. Enfin, d'après le corollaire 6.3.7, la somme de cette série, c'est-à-dire x, est dans X_α, donc dans X. ■

Corollaire 6.4.7. *L'ensemble X est l'ensemble des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$.*

Preuve : En effet, on sait d'après le corollaire 6.3.2 que les éléments de X sont des éléments d'ordre 1 de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig},F}$, et le lemme précédent donne l'inclusion réciproque. ■

6.5 Application aux sous-espaces propres de φ_F

Lemme 6.5.1. *Pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v_p(\lambda) \leqslant h$, on a l'inclusion*

$$(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda} \subset X.$$

Preuve : En effet, soit $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$. On a $x = \varphi_F^m(\lambda^{-m}x)$, donc

$$x \in \bigcap_{m\geqslant 0} \varphi_F^m\left((\mathbf{B}^+_{\max,F})^{v_{\max,F}\geqslant v_{\max,F}(x)-mh}\right),$$

d'où le lemme. ■

Les résultats connus sur X s'appliquent donc aux éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$ pour $v_p(\lambda) \leqslant h$.

Lemme 6.5.2. *Soit $\lambda \in \mathcal{O}_F$ vérifiant $v_p(\lambda) \leqslant h$, et soient*

$$x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[x_n] \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n[y_n]$$

deux éléments de $(\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\lambda}$. Alors la différence

$$v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \frac{v_p(\lambda)}{h\log p}\log v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n)\right)$$

est bornée uniformément en x et y.

Preuve : On a

$$\inf_{m\in\mathbf{N}}\left(mh + v_{\max,F}(\varphi_F^{-m}(x-y))\right) = v_{\max,F}(x-y),$$

donc, d'après le lemme 6.3.1,

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \frac{\log w_X(x-y)}{\log p} \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

D'autre part, d'après le lemme 6.3.3, on a

$$w_X(x-y) = \inf_{n\in\mathbf{Z}} p^{n/e_F}\max\left(v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n), \frac{1}{\log p}\right).$$

Posons $v_n = v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x_n-y_n)$ pour simplifier les notations. On obtient alors

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \max\left(\frac{\log v_n}{\log p}, -\frac{\log\log p}{\log p}\right)\right) \leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

Appliquons ceci à $\varphi_F^m(x) = \lambda^m x$ et $\varphi_F^m(y) = \lambda^m y$, pour $m \in \mathbf{Z}$. On trouve

$$\frac{\log\log p}{\log p} \leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F} + \max\left(\frac{\log v_n}{\log p} + m(h - v_p(\lambda)), -\frac{\log\log p}{\log p} - mv_p(\lambda)\right)\right)$$
$$\leqslant \frac{h}{q-1} + \frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}.$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\frac{\log v_n}{\log p}\frac{v_p(\lambda)}{h} - \frac{\log\log p}{\log p}\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right) &\leqslant \inf_{m\in\mathbf{Z}} \max\left(\frac{\log v_n}{\log p}+m(h-v_p(\lambda)), -\frac{\log\log p}{\log p}-mv_p(\lambda)\right)\\ &\leqslant \frac{\log v_n}{\log p}\frac{v_p(\lambda)}{h} - \frac{\log\log p}{\log p}\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right)+v_p(\lambda)\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right),\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{v_p(\lambda)}{h}\frac{\log\log p}{\log p} &\leqslant v_{\max,F}(x-y) - \inf_{n\in\mathbf{Z}}\left(\frac{n}{e_F}+\frac{v_p(\lambda)\log v_n}{h\log p}\right)\\ &\leqslant \frac{h}{q-1}+\frac{\log(q-1)-\log h}{\log p}+\left(v_p(\lambda)-\frac{\log\log p}{\log p}\right)\left(1-\frac{v_p(\lambda)}{h}\right),\end{aligned}$$

d'où le lemme. ■

Pour finir, donnons quelques conséquences intéressantes de ces calculs.

Corollaire 6.5.3. *Pour tout a vérifiant $1 \leqslant a \leqslant he_F$, l'application*

$$\Phi_a : \begin{cases} \left(\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}\right)^a & \longrightarrow & \left(\mathbf{B}^+_{\max,F}\right)^{\varphi_F=\pi_F^a} \\ (a_i)_{0\leqslant i<a} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} \kappa_n \left[a_{n-a\lfloor n/a\rfloor}^{p^{-h\lfloor n/a\rfloor}}\right]\end{cases}$$

est un homéomorphisme, et Φ_a et Φ_a^{-1} sont uniformément continues.

Preuve : L'injectivité résulte du corollaire 6.3.4, la surjectivité résulte du lemme 6.5.1, et de la définition de X, et la continuité uniforme de Φ_a et Φ_a^{-1} résulte du lemme 6.5.2. ■

La loi d'addition de $\mathbf{B}^+_{\max,F}$ se traduit alors en une loi de groupe analytique sur $\left(\mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}\right)^a$.

Les périodes $t_{\mathcal{F}}$ se représentent en particulier sous la forme ci-dessus.

Proposition 6.5.4. *Il existe un unique $u_{\mathcal{F}} \in \mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ tel que*

$$t_{\mathcal{F}} = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \pi_F^n[u_{\mathcal{F}}^{q^{-n}}].$$

De plus, $u_{\mathcal{F}}$ est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, et l'on a $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}$.

Preuve : Comme $t_{\mathcal{F}} \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F=\pi_F}$, l'existence et l'unicité de $u_{\mathcal{F}}$ découlent du corollaire 6.5.3.

Comme $t_{\mathcal{F}}$ est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, $u_{\mathcal{F}}$ l'est aussi.

Enfin, on a $v_{\max,F}(t_{\mathcal{F}}) = \frac{q}{e_F(q-1)}$, donc

$$\inf_{n\in\mathbf{Z}} \frac{n}{e_F} + q^{-n}v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) \ = \ \frac{q}{e_F(q-1)},$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(u_{\mathcal{F}}) = \sup_{n\in\mathbf{Z}} q^n\left(\frac{q}{e_F(q-1)}-\frac{n}{e_F}\right) = \frac{q}{e_F(q-1)}.$$

■

Pour finir, notons que le lemme principal 4.0.6 s'en déduit relativement aisément dans le cas particulier où $0 < v_p(a) \leqslant h$.

Lemme 6.5.5. *Il existe deux constantes $A, B > 0$ (ne dépendant que de F) telles que si $n \geqslant 1$ et si $x \in \mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ vérifie*

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}})$$

alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

Preuve : En effet, prenons $A = 1$, et considérons un $x \in \mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ vérifiant

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

Alors $x^{(0)} \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie

$$v_p(x^{(0)} - \sigma(x^{(0)})) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

D'après le théorème d'Ax-Sen-Tate, on peut donc écrire (pour $p > 2$) :

$$x^{(0)} = \underbrace{x_0^{(0)}}_{\in \mathbf{m}_{F_{n+1}}} + \underbrace{x_1^{(0)}}_{v_p \geqslant 1 - \frac{p}{(p-1)^2}} .$$

Comme $x_0^{(0)} \in \mathcal{O}_{F_{n+1}}$, la théorie de la ramification supérieure donne :

$$v_p(x_0^{(0)} - \sigma(x_0^{(0)})) \geqslant \frac{1}{(q-1)e_F} \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc

$$v_p(x^{(0)} - \sigma(x^{(0)})) \geqslant \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 1 - \frac{p}{(p-1)^2}\right) \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n})$$

avec $B = \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 1 - \frac{p}{(p-1)^2}\right)$, ce qui démontre le lemme dans le cas $p > 2$.

Pour $p = 2$, prenons $A = 4$. Alors $x^{(2)} \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie

$$v_p(x^{(2)} - \sigma(x^{(2)})) \geqslant 1 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

donc $x^{(0)} = (x^{(2)})^4 \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifie

$$v_p(x^{(0)} - \sigma(x^{(0)})) \geqslant 3 \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}).$$

On peut alors procéder comme dans le cas $p > 2$, et l'on trouve que

$$B = \min\left(\frac{1}{(q-1)e_F}, 3 - \frac{p}{(p-1)^2}\right) = \frac{1}{(q-1)e_F}$$

convient, ce qui démontre le lemme ci-dessus dans le cas $p = 2$. ■

Corollaire 6.5.6. *Soient $C > 0$ et $n \geqslant 1$. Soit $x \in \mathbf{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ vérifiant*

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant C \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant cC \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

pour une certaine constante $c > 0$ indépendante de x, n et C (mais dépendant de F).

Preuve : En effet, soient A et B comme dans le lemme précédent. Posons

$$N = \left\lceil \frac{\log A - \log C}{\log p} \right\rceil,$$

de sorte que $v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x^{p^N} - \sigma(x^{p^N})) \geqslant A$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}$. Alors on a

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x^{p^N} - \sigma(x^{p^N})) \geqslant B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}),$$

donc

$$v_{\widetilde{\mathbf{E}}}(x - \sigma(x)) \geqslant p^{-N} B \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

Enfin, on a

$$p^{-N} B \geqslant p^{-\frac{\log A - \log C}{\log p} - 1} B = \frac{B}{pA} C,$$

donc $c = \frac{B}{pA}$ convient. ■

On en déduit alors le lemme suivant, qui démontre en particulier le lemme 4.0.6 sous la condition $0 < v_p(a) \leqslant h$.

Lemme 6.5.7. *Soit $a \in \mathcal{O}_F$ avec $0 < v_p(a) \leqslant h$. Il existe une constante $c' \in \mathbf{R}$, dépendant seulement de F et a, telle que pour tout $A \in \mathbf{R}$, tout $n \geqslant 1$ et tout $x \in (\mathbf{B}^+_{\max,F})^{\varphi_F = a}$ vérifiant*

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_{n+1}}),$$

on ait :

$$v_{\max,F}(x - \sigma(x)) \geqslant A - c' \qquad (\forall \sigma \in \mathcal{G}_{F_n}).$$

Preuve : Cela découle directement du lemme 6.5.2 et du corollaire précédent. ■

Références

[Ami78] Amice Y. : Duals, Proceedings of the conference on p-adic analysis (Nijmegen, 1978), Report, 7806, Katholieke Univ., Nijmegen, 1–15, 1978

[Ax70] Ax J. : Zeros of polynomials over local fields—the Galois action, Journal of Algebra 15, 417–428, 1070

[Ben00] Benois D. : On Iwasawa theory of crystalline representations, Duke Mathematical Journal 104, n°2, 211–267, 2000

[Ber03] Berger L. : Bloch and Kato's exponential map: three explicit formulas, Documenta Mathematica, vol. suppl., 99–129, 2003

[BK90] Bloch S. et Kato K. : L functions and Tamagawa numbers of motives, The Grothendieck Fesschrift 1, Prog. Math. 86, 333–400, 1990

[CC99] Cherbonnier F. et Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, Journal of the AMS 12, vol. 1, 241–268, 1999

[Col79] Coleman R. : Division values in local fields, Inventiones mathematicae 53 (1979), 91–116

[Col93] Colmez P. : Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, Annals of Mathematics 138, 625–683, 1993

[Col94] Colmez P. : Les nombres algébriques sont denses dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, Astérisque 223, 103–109, 1994

[Col96] Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, LMENS 96 18

[Col98] Colmez P. : Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Annals of Mathematics, 148 (1998), 485–571

[Col02] Colmez P. : Espaces de Banach de dimension finie, Journal de l'Institut de Mathématiques de Jussieu 3, 2002

[CW78] Coates J. et Wiles A. : On p-adic L functions and elliptic units, Journal Australian Math. Soc. A 26, 1–25, 1978

[Fo82a] Fontaine J.-M. : Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Annals of Mathematics 115, 529–577, 1982

[Fo82b] Fontaine J.-M. : Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Inventiones mathematicae 65, 379–409, 1982

[Fo94a] Fontaine J.-M. : Le corps des périodes p-adiques, Astérisque 223, 59–101, 1994

[Fo94b] Fontaine J.-M. : Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque 223, 113–184, 1994

[Fon04] Fontaine J.-M. : Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque 295, 1–115, 2004

[Kat93] Kato K. : Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via BdR, Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991), Lecture Notes in Math. 1553, 50–163, 1993

[LT65] Lubin J. et Tate J. : Formal complex multiplication in local fields, Annals of Mathematics 89, 380–387, 1965

[Lub64] Lubin J. : One parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Annals of Mathematics 80, 464–484, 1964

[Per94] Perrin-Riou B. : Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Inventiones mathematicae 115, 81–149, 1994

[Pe95a] Perrin-Riou B. : Fonctions L p-adiques, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 * (Zürich, 1994), Birkhäuser, 400–410, 1995

[Pe95b] Perrin-Riou B. : Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque 229, 1995

[Sen72] Sen S. : Ramification in p-adic Lie extensions, Inventiones mathematicae 17, 44–50, 1972

[Ser68] Serre J.-P. : Corps locaux, troisième édition, Hermann

[SKL68] Serre J.-P. : Abelian l-adic representations and elliptic curves, McGill University lecture notes, 1968

[ST01] Schneider P. et Teitelbaum J. : p-adic Fourier theory, doc. math. 6, 447–481, 2001

[Tat66] Tate J. T. : p-divisible groups, Proc. Conf. Local Fields, 158–183, 1966

[Tsu04] Tsuji T. : Explicit reciprocity law and formal moduli for Lubin-Tate formal groups, J. Reine Angew. Math. 569, 103–173, 2004

[Vis76] Vishik M. : Non-archimedean measures connected with Dirichlet series, Math. U.S.S.R. Sb. 28, 216–228, 1976

[Win83] Wintenberger J.-P. : Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci ENS 16, 59–89, 1983

[Zha04] Zhang S. : On explicit reciprocity law over formal groups, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences 9-12, 607–635, 2004