

Applications $\mathbf{Q}_p$ -linéaires, continues et Galois-équivariantes de $\mathbf{C}_p$ dans lui-même

Lionel Fourquaux

25 mars 2009

Cet article a été publié au Journal of Number Theory 129 (2009), pages 1246–1255, doi :10.1016/j.jnt.2009.01.009.

1 Introduction

Le but de cet article est de donner une preuve à l'aide d'arguments élémentaires du résultat suivant, dû à Fontaine (cf. [Fon04], proposition 6.2 page 107).

Théorème 1. *Soit K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\mathcal{G}_K = \text{Gal}(\overline{K}/K)$ le groupe de Galois absolu de K . Les applications $\mathbf{Q}_p$ -linéaires, continues et $\mathcal{G}_K$ -équivariantes de $\mathbf{C}_p$ dans lui-même sont les homothéties de rapport dans K .*

La preuve qui est donnée ici s'appuie sur les propriétés des périodes des groupes de Lubin-Tate. La partie 2 récapitule les définitions et propriétés élémentaires des objets ; la partie 3 est consacrée à démontrer les résultats d'existence (par construction explicite) et de non-existence dans $\mathbf{C}_p$ des périodes des groupes de Lubin-Tate ; enfin la partie 4 démontre le théorème en considérant l'action du groupe de Galois sur l'image de logarithmes de périodes par une telle application.

Je tiens à remercier Pierre Colmez, qui m'a suggéré cette méthode, ainsi que le rapporteur, pour les nombreuses améliorations qu'il m'a suggérées.

2 Rappels sur les groupes de Lubin-Tate

2.1 Définition

Notons F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, π_F une uniformisante de F , e_F l'indice de ramification de F sur $\mathbf{Q}_p$ et $q = p^h$ le cardinal du corps résiduel $k_F = \mathcal{O}_F/\pi_F\mathcal{O}_F$. On fixe dorénavant un plongement de F dans $\mathbf{C}_p$.

Soit $\Phi(T) \in \mathcal{O}_F[[T]]$ une série formelle vérifiant $\Phi(T) \equiv T^q \pmod{\pi_F}$ et $\Phi(T) \equiv \pi_F T \pmod{T^2}$. Alors il existe (cf. [Lub64] et [LT65]) un unique groupe formel unidimensionnel $\mathcal{F}$ défini sur $\mathcal{O}_F$ tel que Φ induise un endomorphisme de $\mathcal{F}$. De plus, $\mathcal{F}$ est muni d'une action de $\mathcal{O}_F$, où $a \in \mathcal{O}_F$ agit par l'unique série formelle $[a]_{\mathcal{F}}(T) = aT + \dots$ qui commute avec Φ . En particulier, on a $[\pi_F]_{\mathcal{F}} = \Phi$. Les groupes formels ainsi obtenus sont appelés groupes de Lubin-Tate.

2.2 Logarithme et exponentielle

Notons $+\mathcal{F}$ la loi d'addition du groupe formel $\mathcal{F}$, et posons $\partial_1\mathcal{F}$ sa dérivée partielle par rapport au terme de gauche (c'est-à-dire $\partial_1\mathcal{F}(X, Y) = \frac{\partial}{\partial X}(X +_{\mathcal{F}} Y)$). L'équation différentielle $f'(T) = \partial_1\mathcal{F}(0, f(T))$ a une unique solution dans $TF[[T]]$, que l'on appelle exponentielle du groupe de Lie formel $\mathcal{F}$, et qui sera ici notée $\exp_{\mathcal{F}}$. Elle vérifie $\exp_{\mathcal{F}}(T) = T + \dots$ et $\exp_{\mathcal{F}}(X + Y) = \exp_{\mathcal{F}}(X) +_{\mathcal{F}} \exp_{\mathcal{F}}(Y)$. C'est donc un morphisme de groupes formels du groupe additif $\mathbf{G}_a$ dans $\mathcal{F}$.

La série formelle réciproque de $\exp_{\mathcal{F}}$ donne un morphisme de groupes formels de $\mathcal{F}$ dans $\mathbf{G}_a$, appelé le logarithme de $\mathcal{F}$ et que l'on notera $\log_{\mathcal{F}}$. On a le lemme suivant :

Lemme 1. *Dans $F[[T]]$ muni de la topologie produit (i.e. coefficient par coefficient), on a*

$$\log_{\mathcal{F}}(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{\pi_F^n}.$$

Preuve : En effet, on a $\frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(\exp_{\mathcal{F}}(T))}{\pi_F^n} = \frac{\exp_{\mathcal{F}}(\pi_F^n T)}{\pi_F^n}$, et cette dernière expression converge coefficient par coefficient vers T quand n tend vers l'infini.

Lemme 2. *Soit $x \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ un zéro de $\frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{[\pi_F^{n-1}]_{\mathcal{F}}(T)}$, pour un entier $n > 0$. On a $v_p(x) = \frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)}$.*

Preuve : Pour $n = 1$, x est une racine de $\frac{\Phi(T)}{T}$ et le polygone de Newton de $\frac{\Phi(T)}{T}$ est formé d'un seul segment, reliant $(0, \frac{1}{e_F})$ à $(q-1, 0)$, d'où la valuation de x .

Pour $n \geq 2$, on procède par récurrence en notant que le polygone de Newton de $\Phi(T) - \Phi(x)$ est formé d'un seul segment de pente $-\frac{1}{e_F q^{n-1}(q-1)}$.

Lemme 3. *Le polygone de Newton de la série $\log_{\mathcal{F}}(T)$ est formé des segments reliant les points $(1, 0)$, $(q, -\frac{1}{e_F})$, ..., $(q^n, -\frac{n}{e_F})$, ...*

Preuve : D'après le lemme 1, il suffit de regarder les coefficients des polynômes $\frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{\pi_F^n}$. Or, le lemme 2 donne les valuations des racines de ces polynômes. On en déduit que le polygone de Newton de $\frac{[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)}{\pi_F^n}$ est formé des segments reliant les points $(1, 0)$, $(q, -\frac{1}{e_F})$, $(q^2, -\frac{2}{e_F})$, ..., $(q^n, -\frac{n}{e_F})$, d'où le lemme par passage à la limite.

2.3 Caractère associé à un groupe de Lubin-Tate

On définit le module de Tate de $\mathcal{F}$ comme étant le $\mathcal{O}_F$ -module

$$T_p\mathcal{F} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_F}(F/\mathcal{O}_F, \mathcal{F}(\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p})),$$

où $\mathcal{F}(\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p})$ est le groupe des éléments de l'idéal maximal $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ de $\mathbf{C}_p$ pour la loi de groupe donnée par $\mathcal{F}$. C'est un $\mathcal{O}_F$ -module $T_p\mathcal{F}$ libre de rang 1.

Fixons-en dorénavant un générateur η , et posons $\eta_n = \eta(\pi_F^{-n}) \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$. On a alors $\eta_0 = 0$, $\eta_1 \neq 0$, et $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(\eta_{n+1}) = \eta_n$ pour tout entier $n \geq 0$.

Posons $F_n = F(\eta_n)$ et $F_{\infty} = \bigcup_{n \geq 0} F_n$. D'après le lemme 2, on a $v_p(\eta_n) = \frac{1}{[F:\mathbf{Q}_p]}$ pour tout $n \geq 1$, donc les extensions F_n/F sont totalement ramifiées, d'uniformisante η_n .

Le groupe de Galois $\mathcal{G}_F = \text{Gal}(\overline{F}/F)$ agit sur le module $T_p\mathcal{F}$, et comme l'action de $\mathcal{O}_F$ sur $T_p\mathcal{F}$ est libre et transitive, il existe un unique caractère $\chi_{\mathcal{F}} : \mathcal{G}_F \rightarrow \mathcal{O}_F^*$ tel que :

$$\forall \sigma \in \mathcal{G}_F \quad \forall u \in T_p\mathcal{F} \quad \sigma(u) = \chi_{\mathcal{F}}(\sigma) \cdot u.$$

Ce caractère réalise un isomorphisme de groupes de $\mathcal{G}_F/\mathcal{G}_{F_{\infty}}$ sur $\mathcal{O}_F^*$. Notons que l'image de $\mathcal{G}_{F_n}$, pour $n \geq 1$, est $1 + \pi_F^n \mathcal{O}_F$.

3 Périodes des groupes de Lubin-Tate

3.1 Définition

Soit ρ un plongement de F dans $\mathbf{C}_p$, et soit $F^{\text{gal}} \subset \mathbf{C}_p$ la plus petite extension galoisienne de $\mathbf{Q}_p$ contenant F . On appelle ici période associée au caractère $\rho \circ \chi_{\mathcal{F}}$ un élément $\xi_{\rho} \in \mathbf{C}_p^*$ tel que

$$\frac{\xi_{\rho}}{\sigma(\xi_{\rho})} = \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F^{\text{gal}}}.$$

Notons que si une telle période ξ_{ρ} existe, alors pour tout $r \in \mathbf{Z}$ la $\mathcal{G}_{F^{\text{gal}}}$ -représentation $\mathbf{C}_p((\rho \circ \chi_{\mathcal{F}})^r)$ est isomorphe à $\mathbf{C}_p$.

3.2 Résultats d'existence

Proposition 1. *Si $\rho \in \text{Hom}(F, \mathbf{C}_p) \setminus \{\text{id}\}$, alors il existe une période ξ_{ρ} associée au caractère $\rho \circ \chi_{\mathcal{F}}$.*

Le cas $\rho = \text{id}$ est étudié plus loin. (Il n'existe pas de période ξ_{id}).

Posons $\nu(\rho) \in \{0, \dots, h-1\}$ l'entier tel que l'application induite par ρ dans k_F soit $x \mapsto x^{p^{\nu(\rho)}}$, et, si $f(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n \in \mathcal{O}_F[[T]]$, notons $f^{\rho}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \rho(a_n) T^n \in \mathcal{O}_{\rho(F)}[[T]]$.

Lemme 4. *Si x et y sont deux éléments de $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ vérifiant $x \equiv y \pmod{\pi_F^n}$ pour un entier $n > 0$, alors on a $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(x) \equiv [\pi_F]_{\mathcal{F}}(y) \pmod{\pi_F^{n+1}}$.*

Preuve : Soit $d = [-1]_{\mathcal{F}}(x) +_{\mathcal{F}} y$. Comme la série formelle $[-1]_{\mathcal{F}}(x) +_{\mathcal{F}} (x+T) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$ s'annule pour $T = 0$, on a $d \equiv 0 \pmod{\pi_F^n}$, donc $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(d) \equiv 0 \pmod{\pi_F^{n+1}}$. Or, on a $[\pi_F]_{\mathcal{F}}(y) = [\pi_F]_{\mathcal{F}}(x) +_{\mathcal{F}} [\pi_F]_{\mathcal{F}}(d)$, d'où le lemme.

Lemme 5. *La suite de terme général $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}})$ converge dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ quand n tend vers l'infini. De plus, si l'on note π_{ρ} sa limite, on a*

$$v_p(\pi_{\rho}) \geq \frac{p^{\nu(\rho)}}{e_F(q-1)} + \frac{1}{e_F}$$

avec égalité si $\nu(\rho) > 0$.

Preuve : En effet, on a

$$[\pi_F]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_{n+1}^{p^{\nu(\rho)}}) \equiv \eta_{n+1}^{qp^{\nu(\rho)}} \equiv \eta_n^{p^{\nu(\rho)}} \pmod{\pi_F},$$

donc $[\pi_F^{n+1}]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_{n+1}^{p^{\nu(\rho)}}) \equiv [\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}}) \pmod{\pi_F^{n+1}}$ d'après le lemme 4, d'où la convergence de la suite.

Le polygone de Newton de la série $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^{\rho}(T)$ est le même que celui de $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$. Il est formé des segments reliant les points $(1, \frac{n}{e_F})$, $(q, \frac{n-1}{e_F})$, $(q^2, \frac{n-2}{e_F})$, ..., $(q^n, 0)$ (cf. la preuve du lemme 3). D'autre part, on a $v_p(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}}) = \frac{p^{\nu(\rho)}}{e_F q^{n-1}(q-1)}$ (lemme 2). Pour $0 < \nu(\rho) < q$, on trouve donc dans la somme $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}})$ un terme de valuation strictement inférieure aux autres, correspondant au monôme en $T^{q^{n-1}}$, d'où

$$v_p([\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^{\rho}(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}})) = q^{n-1} \frac{p^{\nu(\rho)}}{e_F q^{n-1}(q-1)} + \frac{1}{e_F} = \frac{p^{\nu(\rho)}}{e_F(q-1)} + \frac{1}{e_F}.$$

Dans le cas $\nu(\rho) = 0$, les monômes en $(\eta_n)^{q^{n-1}}$ et $(\eta_n)^{q^n}$ ont la même valuation, donc on obtient seulement une minoration.

Lemme 6. *Si $\nu(\rho) = 0$, on a $v_p(\pi_\rho) = \frac{1}{e_F(q-1)} + v_p(\pi_F - \rho(\pi_F))$.*

Preuve : Notons tout d'abord que si $x \in \mathcal{O}_F$, alors on a

$$v_p(\rho(x) - x) \geq v_p(x) + v_p\left(\frac{\rho(\pi_F)}{\pi_F} - 1\right),$$

avec égalité quand $v_p(x) = \frac{1}{e_F}$. Cela découle du fait que $\mathcal{O}_F$ est engendré par π_F comme $\mathbf{Z}_p$ -algèbre (cf. [Ser68], début du chapitre IV).

Comme $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(\eta_n) = 0$, considérons le polygone de Newton de $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^\rho(T) - [\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$. D'après la remarque ci-dessus, il est au-dessus du polygone de Newton de $(\rho(\pi_F)\pi_F^{-1} - 1)[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$, avec un sommet commun en $(q^{n-1}, v_p(\pi_F - \rho(\pi_F)))$.

Si l'on évalue le polynôme en η_n , les monômes d'exposant strictement inférieur à q^{n-1} donneront donc (comme dans la preuve du lemme précédent) des termes de valuation strictement plus grande que le monôme d'exposant q^{n-1} .

Pour les exposants (i.e. abscisses) strictement plus grands que q^{n-1} , le polygone de Newton de $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^\rho(T) - [\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$ est en fait strictement au-dessus de celui de $(\rho(\pi_F)\pi_F^{-1} - 1)[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$. En effet, si $v_p(x) = 0$, on a

$$v_p(\rho(x) - x) \geq v_p(\rho(\pi_F) - \pi_F) > v_p\left(\frac{\rho(\pi_F)}{\pi_F} - 1\right).$$

Si l'on évalue $[\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^\rho(T) - [\pi_F^n]_{\mathcal{F}}(T)$ en η_n , on trouve donc un seul monôme de valuation minimale, correspondant au terme en $T^{q^{n-1}}$, donc

$$v_p([\pi_F^n]_{\mathcal{F}}^\rho(\eta_n)) = q^{n-1}v_p(\eta_n) + v_p(\rho(\pi_F) - \pi_F) = \frac{1}{e_F(q-1)} + v_p(\pi_F - \rho(\pi_F)),$$

d'où le lemme.

On en déduit le résultat suivant (cf. [Col93]).

Lemme 7. *On a*

$$v_p(\log_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)) = \begin{cases} \frac{p^{\nu(\rho)}}{e_F(q-1)} + \frac{1}{e_F} & \text{si } \nu(\rho) > 0 \\ \frac{1}{e_F(q-1)} + v_p(\pi_F - \rho(\pi_F)) & \text{si } \nu(\rho) = 0. \end{cases}$$

En particulier, on a $\log_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho) \neq 0$.

Preuve : Cela se déduit du lemme 3 et des lemmes 5 et 6.

Lemme 8. *Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F\rho(F)}$, on a $\sigma(\pi_\rho) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)$.*

Preuve : On a $\sigma\left(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}}\right) \equiv [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}^\rho\left(\eta_n^{p^{\nu(\rho)}}\right) \pmod{\pi_F}$, donc, à l'aide du lemme 4, on trouve $\sigma(\pi_\rho) = [\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)]_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)$.

On en déduit en particulier que

$$\frac{\log_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)^{-1}}{\sigma(\log_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)^{-1})} = \rho(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F\rho(F)},$$

ce qui démontre la proposition 1 avec $\xi_\rho = \log_{\mathcal{F}}^\rho(\pi_\rho)^{-1}$.

3.3 Le cas cyclotomique

Dans le cas $\rho = \text{id}$, en revanche, il n'y a pas de période associée dans $\mathbf{C}_p$. Cela est particulièrement simple à démontrer (et bien connu) dans le cas cyclotomique, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{F}$ est le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m$, ce qui est l'objet de cette partie.

Commençons par rappeler le théorème d'Ax-Sen-Tate (cf. [Ax70]).

Théorème 2. *Soit G un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Alors $\mathbf{C}_p^G$ est l'adhérence de $\overline{\mathbf{Q}_p}^G$ dans $\mathbf{C}_p$.*

En particulier, on a $\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F} = F$.

Plaçons-nous dans le cas $\mathcal{F} = \mathbf{G}_m$. On a alors $F = \mathbf{Q}_p$, et $[p]_{\mathcal{F}}(T) = (1+T)^p - 1$. Rappelons que l'on a fixé un générateur η du module de Tate $T_p \mathcal{F}$. Alors, $\eta_n + 1$ est une racine primitive p^n -ième de l'unité, et l'on a

$$(\eta_{n+1} + 1)^p = \eta_n + 1.$$

Supposons qu'il existe une période ξ_{id} , c'est-à-dire un analogue de $2\pi i$ dans $\mathbf{C}_p$. Comme ξ_{id} est fixe sous l'action de $\mathcal{G}_{F_\infty}$, le théorème d'Ax-Sen-Tate entraîne que $\log \xi_{\text{id}}$ est dans l'adhérence de F_∞ dans $\mathbf{C}_p$.

Lemme 9. *Les $\eta(i) + 1$ pour $i \in I_n = p^{-n}\mathbf{Z} \cap [0, \frac{p-1}{p}[$ forment une base de F_n comme $\mathbf{Q}_p$ -espace vectoriel. De plus, on a*

$$v_p \left(\sum_{i \in I_n} a_i (\eta(i) + 1) \right) - \inf_{i \in I_n} v_p(a_i) \in [0, 1[.$$

Preuve : En effet, l'extension F_n/F est totalement ramifiée, de degré $p^{n-1}(p-1)$, et $\eta_n = \eta(p^{-n})$ en est une uniformisante. On a donc $\mathcal{O}_{F_n} = \mathcal{O}_F[\eta_n] = \mathcal{O}_F[\eta_n + 1]$, et le lemme s'en déduit.

Corollaire 1. *Tout élément x de l'adhérence de F_∞ dans $\mathbf{C}_p$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} a_i(x)(\eta(i) + 1)$, avec $I = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0, \frac{p-1}{p}[$ et $a_i \in \mathbf{Q}_p$, la famille des $a_i(x)$ tendant vers 0 selon le filtre des complémentaires des parties finies. De plus, on a*

$$v_p(x) - \inf_{i \in I} v_p(a_i(x)) \in [0, 1[.$$

Considérons l'application $x \mapsto a_0(x)$. D'après le corollaire ci-dessus, elle est F -linéaire et continue. Elle est en fait aussi $\mathcal{G}_{F_1}$ -équivalente.

Lemme 10. *Si x est dans l'adhérence de F_∞ dans $\mathbf{C}_p$ et si $\sigma \in \mathcal{G}_{F_1}$, alors on a $a_0(\sigma(x)) = a_0(x)$.*

Preuve : Il suffit de montrer le résultat pour $x = \eta(i) + 1$ avec $i \in I$.

Si $i \in p^{-1}\mathbf{Z}$, alors $\eta(i) + 1$ est fixe sous σ , donc le résultat est immédiat.

Si $i \in p^{-\infty}\mathbf{Z} \setminus p^{-1}\mathbf{Z}$, notons j l'unique élément de $p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0, 1[$ qui est congru à $\chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma)i$ modulo $\mathbf{Z}_p$, de sorte que

$$a_0(\sigma(\eta(i) + 1)) = a_0(\eta(\chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma)i) + 1) = a_0(\eta(j) + 1).$$

Comme $v_p(i) < -1$, on a $v_p(j) = v_p(i) < -1$ donc $j \in p^{-\infty}\mathbf{Z} \setminus p^{-1}\mathbf{Z}$. On a deux cas :

- si $j \in [0, \frac{p-1}{p}[$ (donc $j \in I$), alors $a_0(\eta(j) + 1) = 0 = a_0(\eta(i) + 1)$;

- si $j \in \left[\frac{p-1}{p}, 1\right]$, alors on a $0 = \sum_{m=0}^{p-1} \left(\eta\left(\frac{m}{p}\right) + 1\right)$ (rappelons que c'est la somme des racine p -ièmes de l'unité), donc

$$0 = a_0((\eta(j) + 1) \cdot 0) = a_0\left(\sum_{m=0}^{p-1} \eta\left(j + \frac{m}{p}\right) + 1\right) = a_0(\eta(j) + 1)$$

car $j + \frac{m}{p} - 1 \in I$ si $m \in \{1, \dots, p-1\}$, donc $a_0(\eta(j) + 1) = 0 = a_0(\eta(i) + 1)$ dans ce cas aussi.

Considérons maintenant $a_0(\log \xi_{\text{id}})$. C'est un élément de $\mathbf{Q}_p$, et pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{F_1}$ on a :

$$a_0(\log \xi_{\text{id}}) = a_0(\sigma(\log \xi_{\text{id}})) = a_0(\log \xi_{\text{id}} + \log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma)) = a_0(\log \xi_{\text{id}}) + \log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma),$$

donc $\log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma) = 0$, ce qui contredit le fait que $\chi_{\mathbf{G}_m}(\mathcal{G}_{F_1}) = 1 + p\mathbf{Z}_p$. Plus précisément, on montre ainsi les résultats suivants.

Proposition 2. *Si $\alpha \in \mathbf{Q}_p^*$, il n'existe pas d'élément $\lambda \in \mathbf{C}_p$ vérifiant $\sigma(\lambda) = \lambda + \alpha \log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma)$ pour tout σ dans un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$.*

Corollaire 2. *Pour tout $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, il n'existe pas de période associée au caractère $\chi_{\mathbf{G}_m}^n$.*

3.4 Résultats de non-existence

Montrons maintenant qu'il n'existe pas de période ξ_{id} , dans le cas général.

Il est possible de le démontrer en généralisant la méthode de la partie 3.3. Pour cela, on peut adapter les arguments de [Tat66] à la $\mathbf{Z}_p$ -extension $\mathbf{C}_p^{\ker \text{Tr}_{F/\mathbf{Q}_p} \circ \log \circ \chi_{\mathcal{F}}} / F$. On obtient alors une application linéaire, continue et Galois-équivariante, analogue à $x \mapsto a_0(x)$ ci-dessus, et l'on conclut de même en considérant l'image de $\log \xi_{\text{id}}$.

La méthode employée ici, moins élémentaire mais plus concise, consiste à se ramener au cas cyclotomique en prouvant que le produit $\prod_{\rho \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \xi_{\rho}$ coïncide avec la période ξ_{id} du cas cyclotomique. Ceci découle de la théorie du corps de classes local et en particulier des résultats de [LT65].

Notons F^{nr} l'extension non ramifiée maximale de F . Comme l'extension F_{∞}/F est totalement ramifiée, les extensions F_{∞}/F et F^{nr}/F sont linéairement disjointes. On a alors les morphismes de groupes suivants :

$$\mathcal{O}_F^* \xrightarrow{\chi_{\mathcal{F}}} \text{Gal}(F_{\infty}/F) \simeq \text{Gal}(F_{\infty}F^{\text{nr}}/F^{\text{nr}}) \hookrightarrow \text{Gal}(F_{\infty}F^{\text{nr}}/F).$$

Notons r le morphisme injectif de $\mathcal{O}_F^*$ dans $\text{Gal}(F_{\infty}F^{\text{nr}}/F)$ obtenu par composition.

D'après [LT65] (corollaire du théorème 3, qui découle de la théorie du corps de classe local), $F_{\infty}F^{\text{nr}}$ est l'extension abélienne maximale de F . Or, si l'on note $F(\mu_{p^{\infty}})$ l'extension de F engendrée par les racines p^n -ièmes de l'unité, le caractère $\chi_{\mathbf{G}_m}$ réalise un morphisme injectif de $\text{Gal}(F(\mu_{p^{\infty}})/F)$ vers $\mathbf{Z}_p^*$, donc l'extension $F(\mu_{p^{\infty}})/F$ est abélienne, donc $F_{\infty}F^{\text{nr}}$ contient les racines p^n -ièmes de l'unité. On a alors un morphisme de $\text{Gal}(F_{\infty}F^{\text{nr}}/F)$ vers $\mathbf{Z}_p^*$ induit par $\chi_{\mathbf{G}_m}$, que l'on notera aussi $\chi_{\mathbf{G}_m}$.

Considérons le morphisme $\chi_{\mathbf{G}_m} \circ r : \mathcal{O}_F^* \longrightarrow \mathbf{Z}_p^*$. C'est un morphisme de groupes continu. Notons que, par construction de r , on a

$$(\chi_{\mathbf{G}_m} \circ r \circ \chi_{\mathcal{F}})(\sigma) = \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathcal{G}_{F^{\text{nr}}}.$$

La théorie de corps de classe local (cf. [Ser68], chapitre XI paragraphe 3) montre que ce morphisme est en fait la norme $N_{F/\mathbf{Q}_p}$.

Supposons maintenant qu'il existe une période ξ_{id} , ou plus généralement une période associée au caractère $\chi_{\mathcal{F}}^n$ pour un $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$. En considérant le logarithme de cette période (ou le logarithme divisé par n), on trouve un $\log \xi_{\text{id}} \in \mathbf{C}_p$ qui vérifie

$$(1 - \sigma)(\log \xi_{\text{id}}) = \log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma) \quad \text{pour tout } \sigma \in F^{\text{gal}}.$$

Considérons

$$\sum_{\rho \in \text{Hom}(F, \mathbf{C}_p)} \log \xi_{\rho} \in \mathbf{C}_p,$$

où $\log \xi_{\text{id}}$ est comme ci-dessus, et $\log \xi_{\rho}$ pour $\rho \neq \text{id}$ est le logarithme de la période ξ_{ρ} . Si $\sigma \in \mathcal{G}_{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}}$, on a

$$(1 - \sigma) \left(\sum_{\rho \in \text{Hom}(F, \mathbf{C}_p)} \log \xi_{\rho} \right) = \sum_{\rho \in \text{Hom}(F, \mathbf{C}_p)} \rho(\log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) = \log N_{F/\mathbf{Q}_p}(\chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) = \log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma).$$

Si l'on peut étendre cette égalité à tout σ dans un sous-groupe d'indice fini de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors la proposition 2 donne une contradiction, d'où la non-existence de ξ_{id} .

Considérons le cocycle $\sigma \mapsto \log \chi_{\mathbf{G}_m}(\sigma)$ et la suite d'inflation-restriction

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}/F^{\text{nr}}), \widehat{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}}) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}}}, \mathbf{C}_p) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}}, \mathbf{C}_p)$$

(où l'on a noté $\widehat{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}}$ l'adhérence de $F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}$ dans $\mathbf{C}_p$).

On vient de voir que ce cocycle est nul dans $H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}}, \mathbf{C}_p)$, or $\text{Gal}(F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}/F^{\text{nr}})$ est un groupe fini, donc $H^1(\text{Gal}(F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}/F^{\text{nr}}), \widehat{F^{\text{nr}} F^{\text{gal}}})$ est un F^{nr} -module de torsion, donc est nul, donc le cocycle est nul dans $H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}}}, \mathbf{C}_p)$.

Considérons maintenant la suite d'inflation-restriction

$$0 \rightarrow H^1(\text{Gal}(F^{\text{nr}}/F), \widehat{F^{\text{nr}}}) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_F, \mathbf{C}_p) \rightarrow H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}}}, \mathbf{C}_p).$$

D'après proposition 2, le cocycle est non nul dans $H^1(\mathcal{G}_F, \mathbf{C}_p)$. Cependant, son image dans $H^1(\mathcal{G}_{F^{\text{nr}}}, \mathbf{C}_p)$ est nulle, donc $H^1(\text{Gal}(F^{\text{nr}}/F), \widehat{F^{\text{nr}}})$ doit être non trivial.

Or, $H^1(\mathcal{G}_{k_F}, \overline{k_F})$ est nul par la version additive du théorème 90 de Hilbert en caractéristique p , et donc $H^1(\text{Gal}(F^{\text{nr}}/F), \widehat{F^{\text{nr}}}) = 0$, d'où une contradiction. Il n'existe donc pas d'élément $\log \xi_{\text{id}}$ dans $\mathbf{C}_p$, et l'on a prouvé la proposition suivante.

Proposition 3. *Si $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$, il n'existe pas de période associée au caractère $\chi_{\mathcal{F}}^n$.*

4 Preuve du théorème

Revenons à la preuve du théorème 1. On considère une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et f une application $\mathbf{Q}_p$ -linéaire, continue et $\mathcal{G}_K$ -équivariante de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{C}_p$.

Plaçons-nous d'abord dans le cas où $K = \mathbf{Q}_p$. Soit F une extension galoisienne finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit $\mathcal{F}$ un groupe de Lubin-Tate comme dans ce qui précède.

Notons que comme f est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ -équivariante, on a

$$f(F) = f(\mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F}) \subseteq f(\mathbf{C}_p)^{\mathcal{G}_F} \subseteq \mathbf{C}_p^{\mathcal{G}_F} = F,$$

donc F (et plus généralement toute extension algébrique de $\mathbf{Q}_p$) est stable par f .

Considérons la restriction $f|_F$ de f à F . C'est un endomorphisme $\text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$ -équivariant de F . Or, $\text{End}_{\mathbf{Q}_p}(F)$ est engendré comme F -espace vectoriel par $\text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)$, donc on peut écrire

$$f|_F = \sum_{\tau \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \lambda_\tau \tau,$$

avec $\lambda_\tau \in F$.

Étudions maintenant l'image par f des logarithmes des périodes de $\mathcal{F}$.

Soit $\rho \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{\text{id}\}$. Pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_F$, on a $(1 - \sigma)(\log \xi_\rho) = \rho(\log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma))$, donc

$$\begin{aligned} (1 - \sigma)(f(\log \xi_\rho)) &= f((1 - \sigma)(\log \xi_\rho)) \\ &= f(\rho(\log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma))) \\ &= \sum_{\tau \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p)} \lambda_\tau (\tau \rho)(\log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma)) \\ &= \lambda_{\rho^{-1}} \log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma) + \sum_{\tau \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{\rho^{-1}\}} \lambda_\tau (1 - \sigma)(\log \xi_{\tau \rho}), \end{aligned}$$

donc

$$\lambda_{\rho^{-1}} \log \chi_{\mathcal{F}}(\sigma) = (1 - \sigma) \left(f(\log \xi_\rho) - \sum_{\tau \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{\rho^{-1}\}} \lambda_\tau \log \xi_{\tau \rho} \right).$$

Si $\lambda_{\rho^{-1}} \neq 0$, on pourrait choisir un entier n assez grand pour que

$$p^n \lambda_{\rho^{-1}}^{-1} \left(f(\log \xi_\rho) - \sum_{\tau \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{\rho^{-1}\}} \lambda_\tau \log \xi_{\tau \rho} \right)$$

soit dans le disque de convergence de $\exp$, et l'on obtiendrait alors une période pour le caractère $\chi_{\mathcal{F}}^{p^n}$, ce qui est impossible d'après la proposition 3.

On trouve donc $\lambda_{\rho^{-1}} = 0$, pour tout $\rho \in \text{Gal}(F/\mathbf{Q}_p) \setminus \{\text{id}\}$, donc $f|_F = \lambda_{\text{id}} \text{id}$. De plus, on a $\lambda_{\text{id}} = f(1)$.

Ceci étant vrai pour toute extension galoisienne finie $F/\mathbf{Q}_p$, on en déduit que $f|_{\overline{\mathbf{Q}_p}} = f(1) \text{id}$, puis par continuité de f , que $f = f(1) \text{id}$. Enfin, comme $f(\mathbf{Q}_p) \subseteq \mathbf{Q}_p$, on obtient $f(1) \in \mathbf{Q}_p$.

Considérons maintenant le cas général, où K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Comme dans le cas précédent, la $\mathcal{G}_K$ -équivariance de f montre que $f(1)$ est dans K , donc il suffit de montrer que f est une homothétie. En particulier, on peut remplacer K par une extension finie de K . Ceci permet en particulier de supposer que l'extension $K/\mathbf{Q}_p$ est galoisienne, ce que l'on fait à partir de ce point.

Comme f est $\mathcal{G}_K$ -équivariante, l'application $\sigma \circ f \circ \sigma^{-1}$, pour $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ne dépend que de la classe de σ modulo $\mathcal{G}_K$. On peut donc considérer l'application

$$g = \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} \sigma \circ \alpha(f - f(1) \text{id}) \circ \sigma^{-1},$$

pour $\alpha \in K$. Cette application est $\mathbf{Q}_p$ -linéaire et continue, comme f . De plus, elle est $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ -

équivariante. En effet, pour tout $\tau \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, on a

$$\begin{aligned}
\tau \circ g &= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} (\tau \circ \sigma) \circ \alpha(f - f(1) \text{id}) \circ \sigma^{-1} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} (\tau \circ \sigma) \circ \alpha(f - f(1) \text{id}) \circ (\tau \circ \sigma)^{-1} \circ \tau \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} \sigma \circ \alpha(f - f(1) \text{id}) \circ \sigma^{-1} \circ \tau \\
&= g \circ \tau.
\end{aligned}$$

On peut donc appliquer le cas particulier précédent à cette application g , et en déduire que c'est une homothétie. Or on a $g(1) = 0$, donc $g = 0$, donc :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathcal{G}_K} \sigma(\alpha) \sigma \circ (f - f(1) \text{id}) \circ \sigma^{-1} = 0 \quad \text{pour tout } \alpha \in K.$$

Comme les σ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}_p$ (d'après le théorème d'Artin d'indépendance linéaire des caractères), on trouve $\sigma \circ (f - f(1) \text{id}) \circ \sigma^{-1} = 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$, donc $f = f(1) \text{id}$, d'où le théorème 1.

Références

- [Ax70] J. Ax, Zeros of polynomials over local fields—the Galois action, J. Algebra 15 (1970) 417–428.
- [Col93] P. Colmez, Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, Ann. of Math. 138 (1993) 625–683.
- [Fon04] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque 295 (2004) 1–115.
- [LT65] J. Lubin, J. Tate, Formal complex multiplication in local fields, Ann. of Math. 81 (1965) 380–387.
- [Lub64] J. Lubin, One-parameter formal Lie groups over p-adic integer rings, Ann. of Math. 80 (1964) 464–484.
- [Ser68] J.-P. Serre, Corps locaux, troisième édition, Hermann.
- [Tat66] J. Tate, p-divisible groups, in : Proc. Conf. Local Fields, Dreibergen, 1966, pp. 158–183.